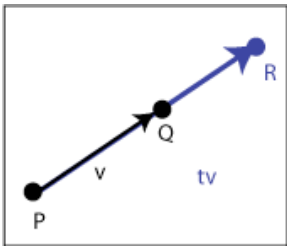
Equação Vetorial da Reta

Dois pontos P e Q, definem um único vetor v = PQ, que representa uma direção. Todo ponto R cuja direção PR seja a mesma de PQ está contido na mesma reta definida pelos pontos P e Q. Portanto, podemos definir uma reta como o conjunto de todos os pontos da forma:

R = P + t*PQ,

onde t é um número real, e t*PQ é colinear a PQ.



Se P = (a, b), Q = (c, d) são pontos definindo uma reta e R = (x, y) é um outro ponto da reta definido obtido com um certo parâmetro t tal que R = P + t*PQ, então:

(x, y) = (a, b) + t*(c-a, d-b)

ou:

x = a + t*(c-a)

y = b + t*(d-b)

Como cada parâmetro real t vai gerar um ponto distinto na reta, podemos considerar que os pontos da reta estão em função de t, ou seja:

R(t) = (x(t), y(t)) = P + t*PQ = (a + t*(c-a), b + t*(d-b))

Segmentos de retas: Podemos representar um segmento de reta PQ restringindo o domínio paramétrico de R(t). Basta observarmos que R(0) = P e R(1) = Q. É fácil ver então que os pontos R(t), onde

$$0 \leq t \leq 1$$

são pontos do segmento.

Intersecção de retas: Duas retas r1 e r2 vão se intersectar se possuírem um mesmo ponto comum. Usando a equação vetorial da reta, temos:

R1(t) = (x1(t), y1(t)) e R2(u) = (x2(u), y2(u)).

Para que um ponto pertença simultaneamente a r1 e r2, devemos ter:

x1(t) = x2(u)

y1(t) = y2(u)

Quando esse sistema possui solução única nas variáveis t e u, essas retas são concorrentes, logo possuem um ponto de intersecção.

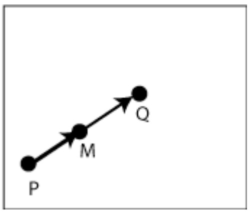
Intersecção de segmentos de reta: Uma vez conhecidos os parâmetros do ponto de intersecção de 2 retas, é necessário determinar se este ponto de intersecção pertence aos segmentos de retas. Dado um segmento de reta na forma PQ, com equação vetorial na forma R(t) = P + t*PQ, o ponto de intersecção da reta definida por PQ com uma outra reta pertencerá ao segmento PQ se:

$$0 \leq t \leq 1$$

onde t é o parâmetro obtido na resolução do sistema para determinar intersecção de retas. Portanto, dois segmentos se intersectam se os dois parâmetros obtidos respeitarem a condição acima.

Ponto médio de um segmento de reta: Dada uma reta representada na forma R(t) = P + t*PQ, vamos analisar o parâmetro t:

1. R(0) = P
2. R(1) = Q
3. R(0.5) = P + 0.5PQ = 0.5P + 0.5Q = 0.5 (P+Q) = M

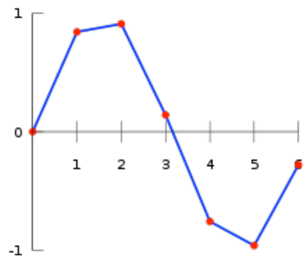


Logo, pela definição de ponto médio M, concluímos que R(0.5) é o ponto médio do segmento PQ.

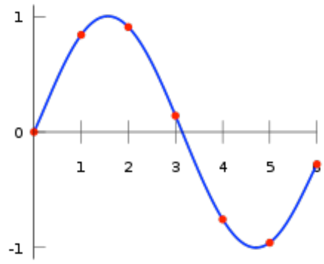
Ângulo de duas retas e segmentos de reta: O ângulo entre duas retas R1(t) = P+t*(PQ) e R2(u) = S + u*(ST) é o mesmo ângulo dos vetores PQ e ST. O mesmo vale para os segmentos de reta PQ e ST.

Condição de ortogonalidade de duas retas e segmentos de reta: Duas retas R1(t) = P+t*(PQ) e R2(u) = S + u*(ST) serão ortogonais se <PQ, ST> = 0. O mesmo vale para os segmentos de reta PQ e ST.

Interpolação (fonte: Wikipedia)



Exemplo de interpolação linear.



Exemplo de interpolação polinomial de grau superior a 1.

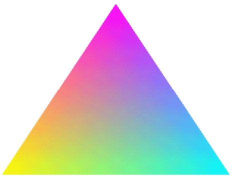
Em matemática, denomina-se interpolação o método que permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais previamente conhecidos.

Em engenharia e ciência, dispõe-se habitualmente de dados pontuais obtidos a partir de uma amostragem ou de um experimento. Tal conjunto de dados pontuais (também denominado conjunto degenerado) não possui continuidade, e isto muitas vezes torna demasiado irreal a representação teórica de um fenômeno real empiricamente observado.

Através da interpolação, pode-se construir uma função que aproximadamente se "encaixe" nestes dados pontuais, conferindo-lhes, então, a continuidade desejada.

Outra aplicação da interpolação é a aproximação de funções complexas por funções mais simples. Suponha que tenhamos uma função, mas que seja complicada demais para que seja possível avaliá-la de forma eficiente. Podemos, então, escolher alguns dados pontuais da função complicada e tentar interpolá-los com uma função mais simples. Obviamente, quando utilizamos a função mais simples para calcular novos dados, normalmente não se obtém o mesmo resultado da função original, mas dependendo do domínio do problema e do método de interpolação utilizado, o ganho de simplicidade pode compensar o erro.

A interpolação permite fazer a reconstituição (aproximada) de uma função, bastando para tanto conhecer apenas algumas das suas abscissas e respectivas ordenadas (imagens no contra-domínio da função). A função resultante garantidamente passa pelos pontos fornecidos, e, em relação aos outros pontos, pode ser considerada um mero ajuste.
Interpolação em Computação Gráfica: Em computação gráfica, trabalhamos com primitivas geométricas que são representadas usando um conjunto discreto de dados, ou pontos. Portanto, é necessário realizar interpolações constantemente. Um exemplo clássico é o problema de colorir um triângulo, tendo em mãos apenas as cores de seus três vertices. Neste caso, realizamos interpolação com coordenadas baricêntricas, que veremos mais adiante.



Exemplo de interpolação de cores dos vértices de um triângulo

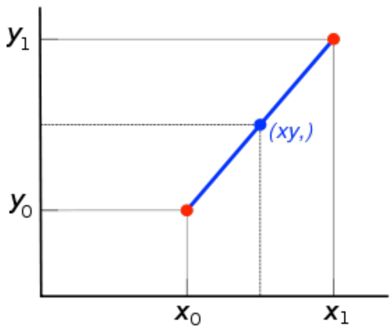
Interpolação linear (fonte: Wikipedia)

Interpolação linear é um método de ajuste de curvas usando polinômios lineares. É muito empregada em matemática (particularmente em análise numérica), e numerosas aplicações, incluindo computação gráfica. É uma forma simples de interpolação.

Se os dois pontos conhecidos são dados pelas coordenadas (x0,y0) e (x1,y1), o interpolador linear é a linha reta entre esses pontos. Para um valor *x* no intervalo (x0,x1), o valor *y* ao longo da linha reta é dada pela equação

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

que pode ser deduzida geometricamente a partir da figura abaixo:



Resolvendo essa equação para y, que é o valor desconhecido em x, temos

$$y = y_0 + (x - x_0)\frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

qual é a fórmula de interpolação linear no intervalo (x0,x1).

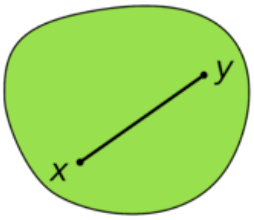
Conjunto convexo (fonte: Wikipedia)

Um conjunto X é convexo quando todo segmento de reta ligando dois pontos de X está contido em X. Ou seja:

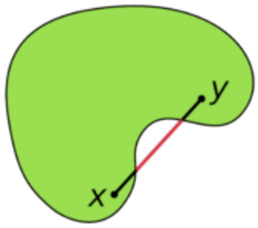
$$\forall x, y \in X \ \forall t \in [0,1] \ \ (1-t)\ x + t\ y \in X$$

Se X não é convexo, dizemos que X é côncavo. O menor convexo que contém um subconjunto X designa-se por fecho convexo de X.

Note que triângulos sempre são convexos. Porém, polígonos com mais lados podem não ser convexos.



Conjunto convexo



Conjunto côncavo

Coordenadas Baricêntricas do triângulo

As **coordenadas baricêntricas** definem uma forma de representação de um ponto P no plano em função dos vértices P1, P2 e P3 do triângulo, de modo que a soma das coordenadas baricêntricas deste ponto seja igual a um, ou seja:

$$P = uP1 + vP2 + wP3,$$
$$u+v+w=1,$$

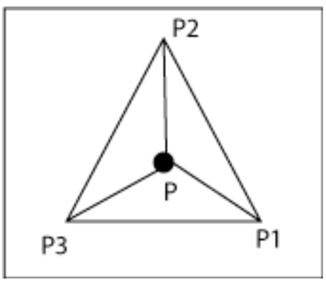
onde u,v,w são as coordenadas baricêntricas de P relativas ao triângulo P1P2P3.

É possível interpretar as coordenadas baricêntricas do triângulo usando area de triângulos. Assim, a maneira mais intuitiva de calcular coordenadas baricêntricas é utilizar as equações abaixo:

$$u = \frac{area(PP2P3)}{area(P1P2P3)}$$

$$v = \frac{area(P1PP3)}{area(P1P2P3)}$$

$$w = \frac{area(P1P2P)}{area(P1P2P3)}$$



Coordenadas baricêntricas como razão entre área de triangulos

A área dos triângulos pode ser obtida usando produto vetorial:

$$area(P1P2P3) = \frac{1}{2}\|P1\vec{P}2 \times P1\vec{P}3\|$$

Usando coordenadas baricêntricas, podemos realizar interpolação com valores definidos nos vertices de um triângulo.

Sejam conhecidos f(P1), f(P2) e f(P3). Além disso, seja P = uP1 + vP2 + wP3. Daí, temos:

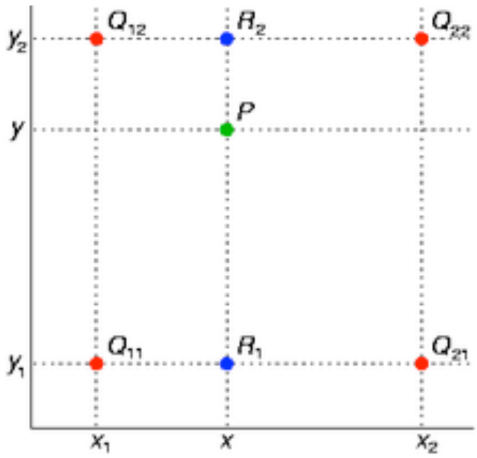
f(P) = u*f(P1) + v*f(P2) + w*f(P3).

A função f pode representar, por exemplo, a cor dos vértices P1, P2 e P3. Daí, usando a equação acima poderemos obter a cor de um ponto P interior ao triângulo.

Interpolação Bilinear (fonte: Wikipedia)

A interpolação bilinear é uma extensão da interpolação linear para interpolar funções de duas variáveis em uma grade regular. A idéia-chave é a realização da interpolação linear, primeiro em uma direção, e depois novamente na outra direção.

Suponha que queremos encontrar o valor da função desconhecida f no ponto P = (x, y). Supõe-se que sabemos o valor de f em quatro pontos Q11 = (x1, y1), Q12 = (x1, y2), Q21 = (x2, y1) e Q 22= (x 2, y 2), como ilustra a figura abaixo:



Nós primeiro realizamos uma interpolação linear na direção *x:*

$$f(R_1) \approx \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)} f(Q_{11}) + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} f(Q_{21})$$

onde R1 = (x,y1), e

$$f(R_2) \approx \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)} f(Q_{12}) + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} f(Q_{22})$$

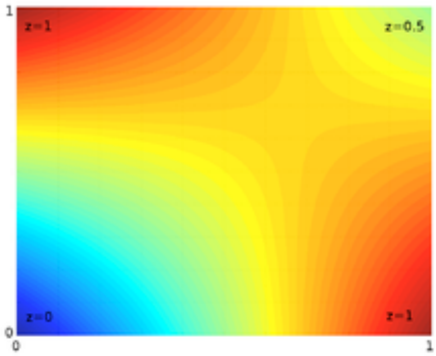
onde R2 = (x,y2).

Finalmente, aplicamos uma interpolação linear na direção y:

$$f(P) \approx \frac{(y2 - y)}{(y_2 - y_1)} f(R_1) + \frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)} f(R_2).$$

ou seja:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \approx\ & \frac{f(Q_{11})}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}(x_2-x)(y2-y) \\
&+\frac{f(Q_{21})}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}(x-x_1)(y2-y) \\
&+\frac{f(Q_{12})}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}(x_2-x)(y-y_1) \\
&+\frac{f(Q_{22})}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}(x-x_1)(y-y_1)
\end{aligned}
$$



Interpolação bilinear das cores de um quadrilátero