4. Curvas Paramétricas e Transformações 2D

Curvas Paramétricas (fonte: Wikipédia)

Em matemática, uma equação paramétrica é uma forma de representar uma curva (ou, em geral, uma superfície) como a imagem de uma função, normalmente dada por uma regra explícita.
Pensando em Geometria Analítica, todas as retas pode ser descritas de forma paramétrica. Para acharmos sua equação, basta termos um ponto, e dois vetores que sejam paralelos a esta reta.

Exemplo 1: Dado o ponto P e o vetor v, a reta r(t) = P + vt é uma das curvas paramétricas mais simples.

Exemplo 2: A circunferência de centro no ponto (1,2) e raio 3 pode ser representado pelas equações paramétricas

$x(t) = 1 + 3 \cos(t),$
$y(t) = 2 + 3 \sin(t),$

onde fica implícito que t (o domínio) percorre o conjunto dos números reais

Exemplo 3: A hélice é uma curva, imersa no espaço, que pode ter equações paramétricas:

$x(t) = a \cos(t),$
$y(t) = a \sin(t),$
$z(t) = b\ t.$

Transformações

Um dos mais poderosos recursos da Computação Gráfica é a facilidade com que determinadas alterações podem ser executadas em um objeto. Essa facilidade advém do fato que um modelo digital é um conjunto de números armazenados em estruturas de dados e disponíveis no computador. É possível aplicar operações matemáticas a estes números. Tais operações são denominadas *Transformações*.

As transformações aqui estudadas serão ***Translação***, ***Escala*** e ***Rotação*** . Estas são as operações básicas de grande parte das aplicações em Computação Gráfica. e podem ser expressas de forma simples, através da multiplicação matricial.

Dado um ponto $P=(x,y)$ do plano, pode-se ver uma tranformação T como uma operação que transforma o ponto P em outro ponto $T(P)$.

Transformação de Translação

Pontos do Plano XY podem ser deslocados (trasladados) para novas posições através da adição de valores de translação às coordenadas desses pontos. Considerando os seguintes valores de translação: t_x unidades, deslocadas paralelamente ao Eixo X, e t_y unidades, deslocadas paralelamente ao Eixo Y, podemos escrever:

$$x' = x + t_x \qquad e \quad y' = y + t_y$$

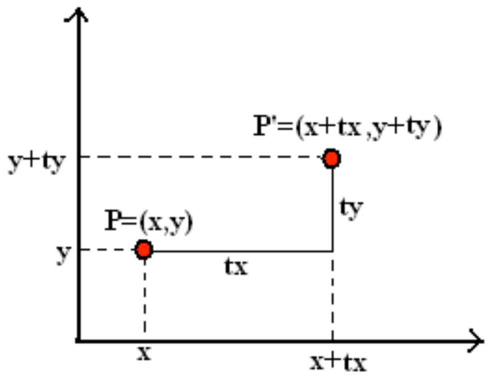

Fig. 4.1 A Translação de um Ponto.

Na transformação acima, x e y são as posições iniciais do ponto e $x'=x+t_x$ e $y'=y+t_y$ são as posições transladadas do ponto.

Sejam, na forma Vetorial e/ou Matricial,

$$P = (x \quad y) \qquad P' = (x' \quad y') \qquad \text{e} \qquad T = (tx \quad ty),$$

Na podemos escrever a transformação de translação como sendo:

$$(x' \quad y') = (x \quad y) + (tx \quad ty)$$

e de forma ainda mais concisa

$$\mathbf{P' = P + T}$$

Um objeto pode ser transladado pela aplicação da operação de transformação aos pontos que o definem.

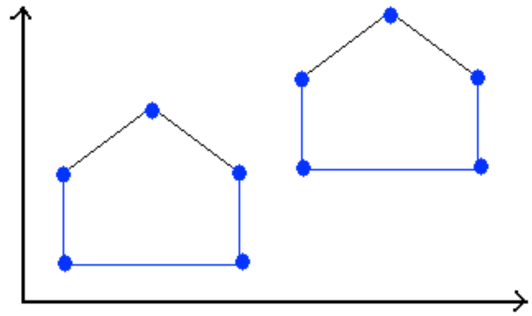

Fig. 4.2 A Translação de um Objeto.

Transformação de Escala

Pontos podem ser submetidos à Transformação de Escala segundo os valores s_x e s_y (fatores de escala) que significam compressão ou estiramento segundo as direções dos eixos X e Y respectivamente. Os novos pontos são obtidos pela Multiplicação desses valores, segundo as seguintes equações:

$$x' = x \, . \, s_x \qquad \text{e} \qquad y' = y \, . \, s_y$$

Vamos considerar um ponto P=(x, y) como sendo uma matriz [1x2]. Se multiplicarmos por uma matriz [2x2], obteremos uma outra matriz, também [1x2], que podemos interpretar como sendo um outro ponto. Sejam

$$P' = (x' \quad y') \qquad \text{e} \qquad S = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

Podemos escrever na forma matricial

$$(x' \quad y') = (x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

ou

$$\mathbf{P' = P \, . \, S}$$

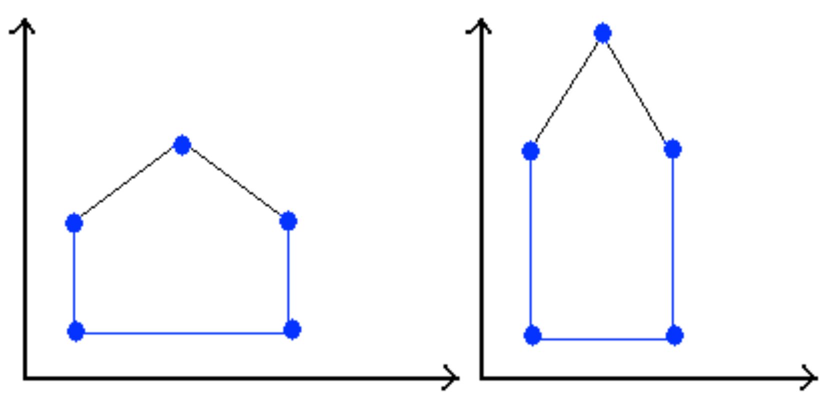

Fig. 4.3 Transformação de Escala

É importante observar que a escala é relativa à origem do sistema de coordenadas. As proporções do objeto mudam nas direções X e Y quando os fatores de escala são diferentes (sx≠sy). Esta proporção é mantida quando o s fatores de escala são iguais (sx=sy)a casa também mudaram.

Assim, a matriz $S_{(2,2)}$ realiza um mapeamento entre um ponto original P=(x, y) e o novo ponto P'=(x', y'). Como nossos objetos são armazenados na forma de listas de pontos, o que acontece se multiplicarmos cada ponto pela matriz de transformação? O resultado dependerá, evidentemente, dos elementos que compõe a matriz de transformação. Se, por exemplo, a matriz de transformação for a matriz identidade, o objeto permanecerá inalterado.

$$S = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$$

Se, no entanto, escolhermos uma matriz

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x & y \end{pmatrix}$$

ou seja, toda Coordenada X será duas vezes maior que o valor anterior. O novo Objeto terá a mesma Altura e o dobro da Largura.

Transformação de Rotação

Pontos podem sofrer rotação de um ângulo φ relativa à origem. A rotação, no sentido anti-horário, é definida matematicamente como:

$$x' = x \,.\, \cos(\varphi) - y \,.\, \sin(\varphi)$$

$$y' = x \,.\, \sin(\varphi) + y \,.\, \cos(\varphi)$$

Na forma Matricial,

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

ou

$$P' = P \, . \, R,$$

onde R representa a matriz de rotação.

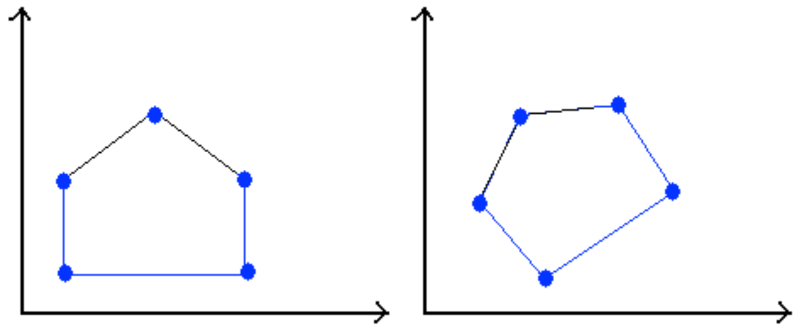

Fig. 4.4 A Rotação de um Objeto

Ângulos Positivos são medidos no sentido Anti-Horário, de X para Y. Para Ângulos Negativos, sentido Horário, as relações

$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) \quad \text{e} \quad \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$$

podem ser utilizadas para modificar as equações apresentadas. A matriz de transformação para uma rotação anti-horária de φ graus em torno da origem é

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Um objeto pode ser transladado pela aplicação da operação de transformação aos pontos que o definem.

Coordenadas Homogêneas e a Representação Matricial

A representação matricial para Translação, Escala e Rotação é, respectivamente,

$P' = P + T$ **(translação)**

$P' = P \, . \, S$ **(escala)**

$P' = P \, . \, R$ **(rotação)**

Infelizmente, segundo essas equações, a translação é tratada diferentemente (como uma adição) em comparação com a escala e a rotação (multiplicações). Seria importante podermos tratar todas as três transformações de forma uniforme ou homogênea e assim poder facilmente combiná-las. Veremos agora como fazer isso. Se expressarmos os pontos em *coordenadas homogêneas*, as três transformações poderão ser tratadas como multiplicações matriciais. Coordenadas homogêneas foram desenvolvidas na geometria e posteriormente aplicadas na Computação Gráfica.

Em Coordenadas Homogêneas, um ponto *P*=(*x, y*) é representado como *P*=(*w.x, w.y, w*) para qualquer fator de escala w ≠ 0. Assim, dado um ponto *P*=(*X*, *Y*, *w*) em coordenadas homogêneas podemos obter sua representação em coordenadas cartesianas (*x*,*y*) efetuando o seguinte cálculo:

$$x = X/w \qquad \text{e} \qquad y = X/w$$

Quando *w*=1 não é necessário executar as divisões. Neste caso, o uso das coordenadas homogêneas tem o objetivo de permitir a combinação das três transformações geométricas básicas. Em coordenadas homogêneas a representação matricial da transformação de **Translação** é

$$(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{pmatrix}$$

de outra forma, $P' = P \,.\, T$, onde

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{pmatrix}.$$

De forma semelhante, a representação matricial da transformação de escala é

$$(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_x & s_y & 1 \end{pmatrix}$$

e definindo-se $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_x & s_y & 1 \end{pmatrix}$ temos $P' = P \,.\, S.$

Finalmente, a representação matricial da transformação de rotação é

$$(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1).\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fazendo $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, temos que $P' = P \,.\, R$

Como exemplo do emprego de coordenadas homogêneas, vamos imaginar o que acontece se um ponto P é trasladado por (t_{x1} , t_{y1}) para P' e então transladado por (t_{x2} , t_{y2}) para P''. Intuitivamente podemos esperar que o resultado seja uma translação composta e igual a ($t_{x1} + t_{x2}$, $t_{y1} + t_{y2}$). Então vejamos,

$$P' = P \,.\, T_1 \qquad e \qquad P'' = P' \,.\, T_2 \,,$$

onde T_1 e T_2 são respectivamente as matrizes de translanção de (t_{x1} , t_{y1}) e (t_{x2} , t_{y2}). Substituindo-se a 1ª na 2ª equação, vem

$$P'' = (P \,.\, T_1) \,.\, T_2 = P \,.\, T_1 \,.\, T_2$$

A matriz produto, T_1 . T_2, que leva P a P'', é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_{x1} & t_{y1} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_{x2} & t_{y2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_{x1} + t_{x2} & t_{y1} + t_{y2} & 1 \end{pmatrix}$$

A essa matriz chama-se composição ou concatenação de T_1 e T_2 . De forma similar para a Transformação de Escala, temos

$$\begin{pmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & s_{y2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{x1} . s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} . s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A essa matriz chama-se composição ou concatenação de S_1 e S_2.

Combinação das Transformações 2D

É bem mais eficiente aplicar uma única transformação composta a um ponto do que uma série de transformações simples, uma após a outra. Consideremos o problema da rotação de um objeto em torno de um ponto arbitrário P_1. Como somente conhecemos a rotação em torno da origem, vamos converter nosso problema original (desconhecido) em três diferentes problemas (já conhecidos). Assim, para rotacionar em torno de P_1, é necessária uma seqüência de três transformações fundamentais (Fig 4.5).

1 – Transladar de P_1 até a origem (matriz T_1);

2– Rotacionar (matriz R)e

3–Transladar da origem até P_1 (matriz T_2).

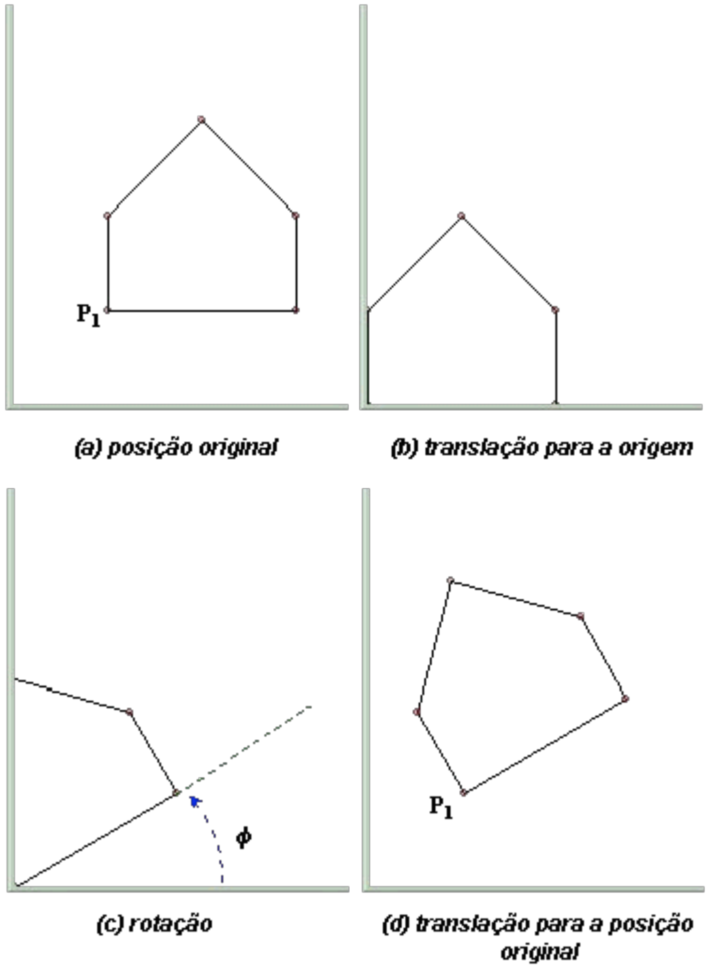

Fig. 4.5 Rotação em torno de um ponto arbitrário.

A primeira translação T_1 é de ($-x_1$, $-y_1$) e a última translação T_2 é o inverso (x_1 , y_1).
A composição dessas transformações é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ x_1(1-\cos\theta)+y_1\sin\theta & y_1(1-\cos\theta)-y_1\sin\theta & 1 \end{pmatrix}$$

A composição de transformações pela multiplicação matricial é um exemplo de como as coordenadas homogêneas trazem simplicidade a esse processo. Um processo semelhante é usado na transformação de escala de um objeto relativa a um ponto arbitrário P_1, ou seja, translada para a origem, escala, translada de volta à posição original.

A composição dessas transformações é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ x_1(1-s_x) & y_1(1-s_y) & 1 \end{pmatrix}$$

Vejamos um outro exemplo: efetuar a escala, rotacionar e posicionar a casa numa posição final P_2, sendo P_1 o centro de rotação e de escala (Fig 4.6). A seqüência deverá ser: translada P_1 para a origem, efetua a escala e a rotação, e então translada da origem para a nova posição P_2. A estrutura de dados que armazena essa informação pode conter o fator de escala, o ângulo de rotação, os valores da rranslação, ou pode simplesmente armazenar a matriz resultante da composição das transformações:

$$T_1 \,.\, S \,.\, R.\, T_2$$

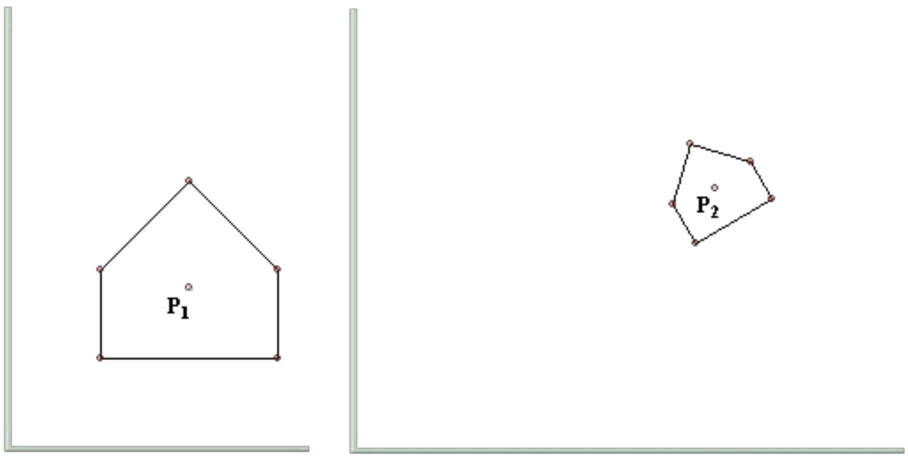

Fig. 4.6 Escala, rotação e posicionamento concatenados.

Esta composição de transformações, aqui demonstrada, será continuamente utilizada em operações de visualização 2D e 3D. Devemos observar que a escolha de P_1 - centro de rotação e escala - não é arbitrária, mas convenientemente adotada como sendo o centro geométrico (ou de gravidade) do objeto. Desta forma, garantimos que as operações relacionadas com a origem do sistema de coordenadas (rotação e escala) não produzirão deslocamentos ou distorções indesejáveis nas imagens transformadas. Quanto a P_2 , a escolha é unicamente definida em função do layout da janela de visualização (ViewPort).

Conceitos Básicos sobre Matrizes (REVISÃO)

As imagens na computação gráfica são geradas a partir de uma série de segmentos de linha que, por sua vez, são representados pelas coordenadas de seus pontos extremos. Antes de conhecer as operações matemáticas que podem ser executadas sobre esses pontos, vamos rever alguns conceitos que iremos utilizar, notadamente a multiplicação matricial.

Consideramos uma matriz como sendo um conjunto (array) bi-dimensional de números.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Fig. 4.7 Exemplos de Matrizes.

Dada a matriz $A_{(3,3)}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

então o elemento na 2ª linha e 1ª coluna será ($a_{2,1}$) correspondente ao valor (4).A operação matricial que mais nos interessa é a multiplicação. Envolve produtos simples e a soma de elementos das matrizes. Nem todo par de matrizes pode ser multiplicado. Somente podem ser multiplicadas as matrizes cujo número de colunas, da 1ª matriz, seja igual ao número de linhas da 2ª matriz. Exemplo:

$$\mathbf{A}_{(1,3)} \cdot \mathbf{B}_{(3,2)} = \mathbf{C}_{(1,2)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 29 \end{pmatrix}$$

Diferentemente da multiplicação de números a multiplicação de matrizes não é comutativa. Exemplo:

$$\mathbf{A}_{(1,3)} \cdot \mathbf{B}_{(3,2)} \neq \mathbf{B}_{(3,2)} \cdot \mathbf{A}_{(1,3)}$$

Quando multiplicamos duas matrizes, obtemos uma matriz como resultado. A matriz produto terá o número de linhas da 1ª matriz e o número de colunas da 2ª matriz. Exemplo:

$$\mathbf{A}_{(3,3)} \cdot \mathbf{B}_{(3,2)} = \mathbf{C}_{(3,2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 54 \\ 27 & 59 \\ 54 & 105 \end{pmatrix}$$

Os elementos da matriz produto C são obtidos, a partir dos elementos das matrizes A e B, através da seguinte fórmula:

$$\mathbf{C}(i,k) = \sum_{j} \mathbf{A}(i,j) \cdot \mathbf{B}(j,k)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 54 \\ 27 & 59 \\ 54 & 105 \end{pmatrix}$$

Fig. 4.8 Exemplo da multiplicação de matrizes.

A multiplicação de matrizes é associativa. Isto significa que se tivermos uma seqüência de matrizes para multiplicar, não importa qual será multiplicada primeiro, desde que mantenhamos a mesma seqüência. Exemplo:

$$\mathbf{A}. (\mathbf{B}.\mathbf{C}) = (\mathbf{A}.\mathbf{B}). \mathbf{C}$$

Esta é uma propriedade extremamente útil, por ela, podemos combinar diversas transformações geométricas em uma única transformação, facilitando os nossos cálculos.Existe um grupo de matrizes que quando multiplicada por outra matriz tem a propriedade de reproduzir essa mesma matriz. Este tipo de matriz recebe o nome de identidade. São matrizes quadradas (possuem o mesmo número de linhas e colunas) e todos os elementos são nulos, exceto os pertencentes à diagonal principal que são iguais a 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fig. 4.9 Exemplos de matriz identidade.

Seja I uma matriz identidade, então

I . A = A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Fig. 4.10 Exemplo da multiplicação pela matriz identidade.