

6. Geometria, Primitivas e Transformações 3D

Até agora estudamos e implementamos um conjunto de ferramentas básicas que nos permitem modelar, ou representar objetos bi-dimensionais em um sistema também di-dimensional. Existem aplicações que são tipicamente bi-dimensionais, tais como mapas, gráficos, etc. No entanto, nosso mundo é tri-dimensional e, como já citado anteriormente, a Computação Gráfica visa oferecer formas de se observar os modelos computadorizados, seja na arquitetura, indústria, simulação, animação, etc.

- Geometria 3D

Iniciamos nosso estudo 3D revendo conceitos da Geometria Analítica, necessários para a especificação dos objetos. Veremos os elementos básicos: pontos, retas e planos no espaço 3D.

Sistema de Coordenadas Cartesianas 3D

Em geral, nas aplicações no campo da Matemática e Engenharia, trabalhamos no Sistema de Coordenadas Cartesianas. Podemos definir Coordenadas Cartesianas como sendo um sistema de referência espacial, a partir do qual, especificamos localizações e medições.

No Espaço tri-Dimensional, um Sistema Cartesiano é representado por :

$$E_3 = (\vec{X} \ \vec{Y} \ \vec{Z} \ O)$$

onde O é a origem do sistema, e o terceiro elemento (chamado coordenada Z ou cota) representa a distância de um ponto em relação à origem contada sobre o eixo Z.

Esse sistema de coordenadas pode tomar duas formas – o sistema da mão direita e o sistema da mão esquerda, conforme são apresentados nas figuras abaixo.

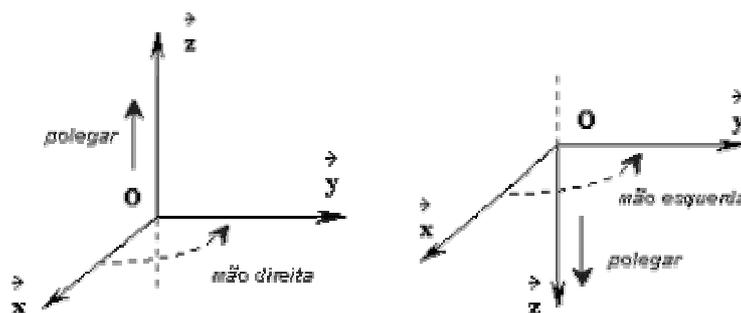


Fig. 6.1 O Sistema Cartesiano no Espaço 3D.

Os termos mão direita e esquerda derivam da regra da Geometria Analítica que estabelece a orientação do vetor resultante do produto vetorial

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}$$

ou seja, com os dedos da mão apontando no sentido de X para Y teremos o polegar indicando o sentido do vetor resultante Z. O mais usado é o sistema da mão direita.

Na comunidade da Computação Gráfica normalmente é utilizado o sistema da mão direita, no entanto é construído de forma diferente. A razão disto é que aprendemos a desenhar em unidades de vídeo bi-dimensionais – representando unicamente X e Y e quando se tornou necessário representar profundidades, a coordenada Z foi acrescentada segundo um eixo perpendicular aos eixos X e Y. Essa representação é apresentada nas figuras seguintes.

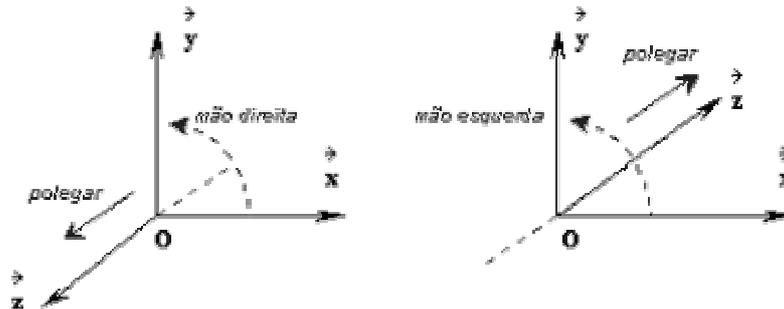


Fig. 6.2 O Sistema Cartesiano na Computação Gráfica.

Observamos que também existem as duas formas de sistema – mão direita e mão esquerda, dependendo igualmente da orientação do eixo Z. Esses sistemas de coordenadas são idênticos aos sistemas Cartesianos apresentados anteriormente, somente orientados de forma diferente.

Pontos no Espaço 3D

A partir de agora, qualquer **ponto** no espaço 3D deve ser especificado como uma tripla ordenada (x,y,z).

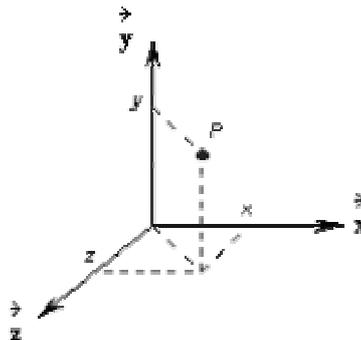


Fig. 6.3 A especificação de um ponto no sistema cartesiano 3D.

Retas no Espaço 3D

Conforme aprendemos, uma reta em 2D é determinada segunda a seguinte equação:

$$\frac{(Y - Y_1)}{(X - X_1)} = \frac{(Y_2 - Y_1)}{(X_2 - X_1)}$$

Esta equação estabelece que Y varia numa proporção constante em relação a X. Em 3D, à medida que movemos um ponto ao longo de uma reta, tanto Y quanto Z variam proporcionalmente em relação a X. Assim, uma reta em 3D é determinada pelo seguinte par de equações:

$$\frac{(Y - Y_1)}{(X - X_1)} = \frac{(Y_2 - Y_1)}{(X_2 - X_1)}$$

$$\frac{(Z - Z_1)}{(X - X_1)} = \frac{(Z_2 - Z_1)}{(X_2 - X_1)}$$

Da mesma forma, são necessárias as coordenadas de dois pontos,

$$(X_1 \ Y_1 \ Z_1) \text{ e } (X_2 \ Y_2 \ Z_2)$$

para especificarmos uma reta em 3D. As equações acima são chamadas de *equações implícitas* da reta.

Outra forma de descrever uma reta é através das *equações paramétricas*, onde cada coordenada é expressa em função de um parâmetro u . Nesta forma de representação, à medida que u varia de 0 a 1, x se desloca de x_1 até x_2 , y se desloca de y_1 até y_2 , e z se desloca de z_1 até z_2 . (Fig 6.4) Quando u é igual a 0, x é igual a x_1 , y é igual a y_1 e z é igual a z_1 .

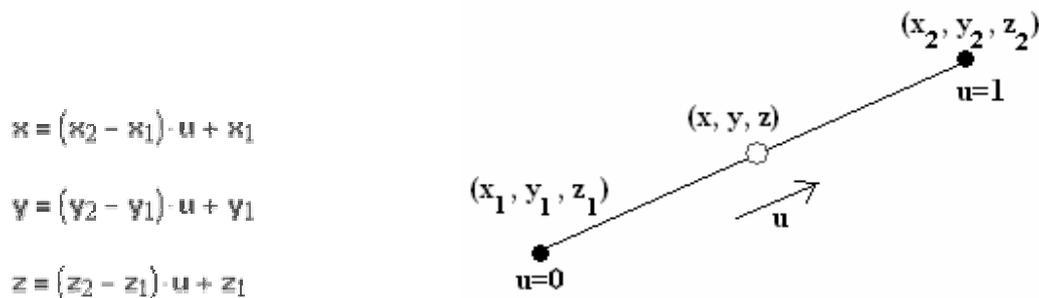


Fig 6.4. Descrição Paramétrica da reta.

Planos no Espaço 3D

No espaço 3D, também necessitamos trabalhar com Planos. Assim como uma reta, um plano pode ser especificado de diversas formas. A partir de uma única equação,

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

fazendo-se

$$B_1 = \frac{B}{A}, \quad C_1 = \frac{C}{A} \text{ e } D_1 = \frac{D}{A}$$

obtemos

$$x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$$

Como é requerida a determinação das três constantes, B_1 , C_1 e D_1 , resulta que, para especificarmos um plano no espaço 3D, necessitamos conhecer as coordenadas de três pontos, não colineares, que pertençam a esse plano. Assim, dados

$$(x_1 \ y_1 \ z_1), (x_2 \ y_2 \ z_2) \text{ e } (x_3 \ y_3 \ z_3)$$

podemos encontrar a equação implícita do plano ao resolver o sistema de três equações com três incógnitas,

$$x_1 + B_1 \cdot y_1 + C_1 \cdot z_1 + D_1 = 0$$

$$x_2 + B_1 \cdot y_2 + C_1 \cdot z_2 + D_1 = 0$$

$$x_3 + B_1 \cdot y_3 + C_1 \cdot z_3 + D_1 = 0$$

Outra forma de encontrar a equação implícita de um plano é a partir de um ponto contido neste plano e da direção perpendicular ao mesmo (Fig 6.5). Um vetor perpendicular a um plano é chamado vetor normal. Sejam

$$(n_x, n_y, n_z) \text{ e } (x_p, y_p, z_p),$$

respectivamente, o vetor normal e as coordenadas de um ponto no plano.

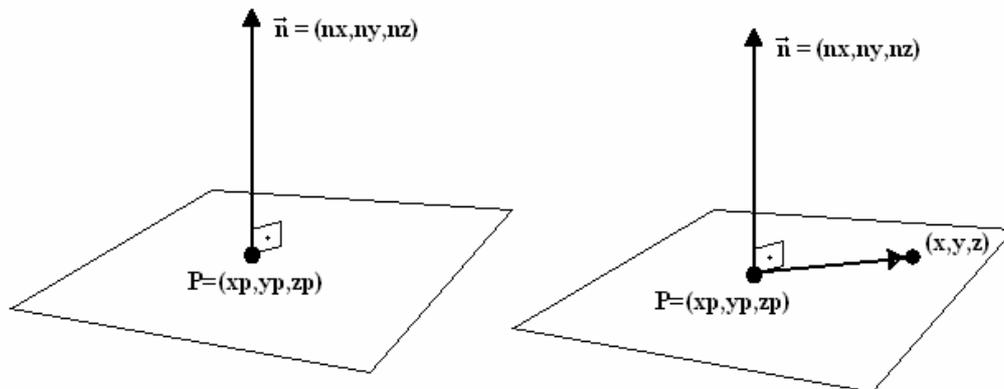


Fig. 6.5 (a) Um vetor 3D; (b) A representação do vetor normal a um plano.

Se (x, y, z) é um ponto arbitrário no plano, então

$$(x - x_p \ y - y_p \ z - z_p)$$

é um vetor também contido no plano (Fig 6.5b). Podemos deduzir a equação do plano, a partir do *produto escalar* entre dois vetores, sendo um deles contido no plano e outro normal a esse plano.

Por definição, o produto escalar de dois vetores é a soma dos produtos de suas componentes tomadas correspondentemente. Por exemplo, dados os vetores A e B,

$$A = (x_A \ y_A \ z_A) \text{ e } B = (x_B \ y_B \ z_B)$$

então, seu produto escalar é

$$A \cdot B = x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B + z_A \cdot z_B$$

Esse resultado é igual ao produto dos comprimentos dos respectivos vetores, multiplicados pelo co-seno do ângulo formado entre eles.

$$A \cdot B = |A| \cdot |B| \cdot \cos(\phi)$$

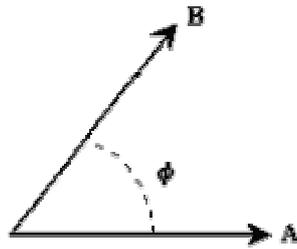


Fig. 6.6 O ângulo entre dois vetores.

Dado que o ângulo formado por um vetor contido em um plano e o vetor normal a esse plano é 90° ($\pi/2$ radianos) e que o cosseno de 90° é igual a zero, temos que, o produto escalar entre o vetor normal e qualquer outro vetor contido no plano é igualmente zero. Considerando que podemos definir um vetor no plano como sendo a diferença entre dois pontos quaisquer contidos no plano, vem que

$$n_x \cdot (x - x_p) + d_y \cdot (y - y_p) + d_z \cdot (z - z_p) = 0.$$

que é uma equação verdadeira para qualquer (x, y, z) contido no Plano. Portanto, esta é uma outra forma de equação implícita para o plano.

Vimos duas formas de definir a equação implícita de um plano. Agora veremos como definir a **equação paramétrica** de um plano. Dados três pontos $P_1=(x_1, y_1, z_1)$, $P_2=(x_2, y_2, z_2)$ e $P_3=(x_3, y_3, z_3)$ do plano, definimos os vetores P_2-P_1 e P_3-P_1 (Fig 6.7). Um ponto $P = (x, y, z)$ qualquer do plano pode ser gerado a partir da equação

$$P = P_1 + s \cdot (P_2 - P_1) + t \cdot (P_3 - P_1),$$

onde s e t são números reais. Esta equação forma três outras equações em x , em y e em z .

$$\begin{aligned} x &= x_1 + s \cdot (x_2 - x_1) + t \cdot (x_3 - x_1) \\ y &= y_1 + s \cdot (y_2 - y_1) + t \cdot (y_3 - y_1) \\ z &= z_1 + s \cdot (z_2 - z_1) + t \cdot (z_3 - z_1) \end{aligned}$$

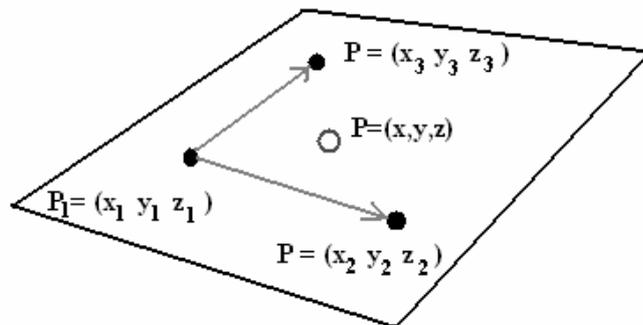


Fig 6.7. Equações paramétricas do plano.

- Primitivas Gráficas 3D

Uma vez que conhecemos os fundamentos geométricos que nos permitem especificar pontos, linhas e planos em três dimensões, vamos agora começar a pensar em como capacitar um sistema gráfico, até então 2D, a processar objetos definidos no espaço 3D.

Conforme observamos na fig. 6.7, existe uma área de transição entre os espaços 2D e 3D, decorrente da necessidade de apresentarmos imagens em um dispositivo bi-dimensional, que é a

unidade de vídeo. Observamos, também, que todo o processo de criação, desenvolvido no espaço do usuário, passa a ser tri-dimensional.

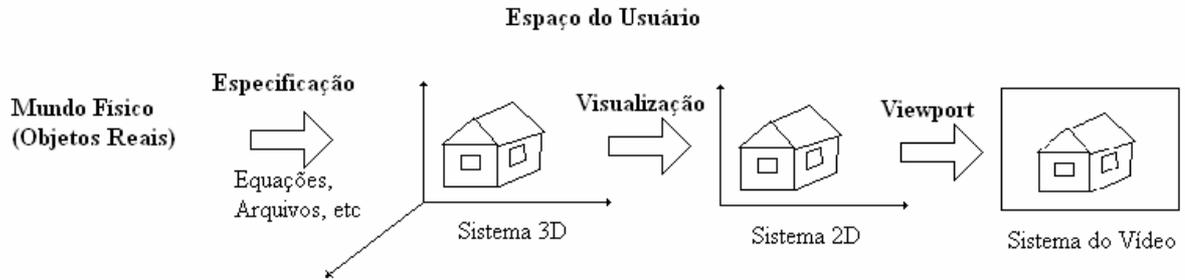


Fig. 6.7 O processo de criação 3D e a representação 2D.

Algumas etapas e adaptações necessárias para a implementação dos recursos 3D são em nosso sistema gráfico:

(1) - As estruturas de dados correspondentes às três primitivas gráficas fundamentais deverão ser redefinidas para especificar entidades tri-dimensionais:

Ponto : $\{ (x, y, z) \}$

Linha : $\{ P_1 (x_1, y_1, z_1) - P_2 (x_2, y_2, z_2) \}$

Polígono: $\{ P_1 (x_1, y_1, z_1) , P_2 (x_2, y_2, z_2) , P_3 (x_3, y_3, z_3) , \dots , P_n (x_n, y_n, z_n) \}$

(2) – As funções que definem o espaço do usuário) devem ser estendidas para o espaço 3D.

(3) – As três transformações primitivas devem ser estendidas para o espaço 3D: Translação(t_x, t_y, t_z); Escala (s_x, s_y, s_z); Rotação(ϕ) em torno dos Eixos X, Y e Z .

(4) – Inclusão de novas transformações (de visualização), necessárias para conduzir o objeto do espaço 3D para o espaço 2D.

- Transformações 3D

Uma vez criada a descrição de um objeto 3D, através de equações ou de um arquivo (.txt), executamos transformações geométricas que nos permitem definir condições particulares de visualização, ou seja, posição, tamanho e orientação do objeto. A cada posição particular do objeto, ou, a cada posição particular do observador, corresponde uma diferente visualização do objeto. Por exemplo, para criar um elipsóide com raios 2, 3 e 4 nas direções X, Y e Z, respectivamente, centrada no ponto (5,3,6), podemos primeiro criar uma esfera de raio unitário, centrada na origem, cuja equação é relativamente simples ($x^2+y^2+z^2=1$). Em seguida aplicamos as transformações de escala nas direções X , Y e Z, com fatores 2, 3 e 4, respectivamente. Por último aplicamos a translação para a posição (5,3,6) (Fig 6.8). Este processo equivale a definir o objeto em relação a um sistema de coordenadas local e em seguida aplicar transformações, para defini-lo em relação ao sistema global.

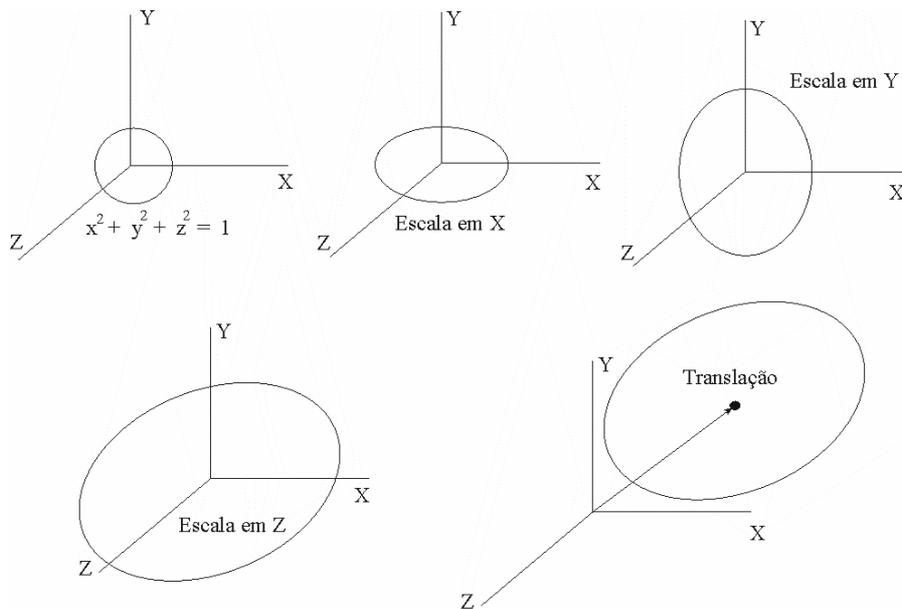


Fig. 6.8 Definição de um elipsoide a partir da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Como visto no caso 2D, as transformações se baseiam nas operações de translação, escala e rotação. O que faremos, a partir de agora, é estender essas operações para o espaço 3D. Estas Operações primitivas, constituem o coração das aplicações em Computação Gráfica 3D, por isso, é de suma importância o seu entendimento.

Duas importantes propriedades, presentes já nas transformações 2D, permanecem válidas:

- (1) Uma transformação pode ser representada por uma matriz.
- (2) Transformações complexas, reunindo uma seqüência de transformações elementares, podem ser concatenadas de forma a produzir uma única matriz de transformação que produzirá o mesmo efeito das transformações elementares.

A representação das transformações 2D, como matrizes 3×3 , pode ser estendida para as transformações 3D que são representadas por matrizes 4×4 . Para isso, um ponto em coordenadas 3D, (x, y, z) , é representado em coordenadas homogêneas como (Wx, Wy, Wz, W) , onde $W \neq 0$.

O sistema de coordenadas 3D que usaremos em nosso estudo é o sistema da mão direita. Quanto ao sentido das rotações, convencionamos que são positivas, quando olhando da parte positiva de um eixo para a origem, uma rotação de 90° no sentido anti-horário, coloca um semi-eixo positivo sobre outro também positivo.

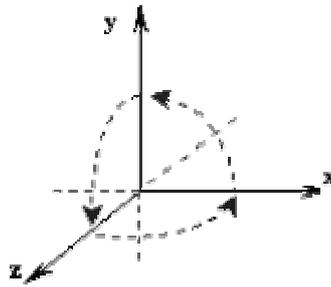


Fig. 6.9 A convenção do sentido de rotação positivo.

A translação em 3D é uma simples extensão do caso 2D:

$$T(D_x, D_y, D_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ D_x & D_y & D_z & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$(x \ y \ z \ 1) \cdot T(D_x, D_y, D_z) = (x + D_x \ y + D_y \ z + D_z \ 1)$$

A escala em 3D, da mesma forma, é uma extensão do caso 2D:

$$S(S_x, S_y, S_z) = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$(x \ y \ z \ 1) \cdot S(S_x, S_y, S_z) = (S_x \cdot x \ S_y \cdot y \ S_z \cdot z \ 1)$$

A rotação 3D em torno do eixo Z é exatamente a rotação no caso 2D, ou seja, as coordenadas (z) permanecem inalteradas. Assim,

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A rotação 3D em torno do eixo X é:

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A rotação 3D em torno do eixo Y é:

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Todas essas matrizes de transformação possuem suas Inversas. A inversa para T é obtida pelo negativo de seus argumentos (-Dx, -Dy, -Dz); a Inversa para S é obtida pelo recíproco de seus argumentos (1/Sx, 1/Sy, 1/Sz) e, para cada uma das três matrizes de rotação, a inversa para R é obtida pelo negativo do ângulo de rotação (-φ).

Como já citado, um número qualquer de matrizes, envolvendo rotação, escala e translação, pode ser concatenado, ou multiplicado. A matriz resultante será sempre da forma

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{pmatrix}$$

onde podemos observar que a sub-matriz (r) resume as operações de rotação e escala, enquanto (t) as operações de translação.