Universidade Federal de Alagoas

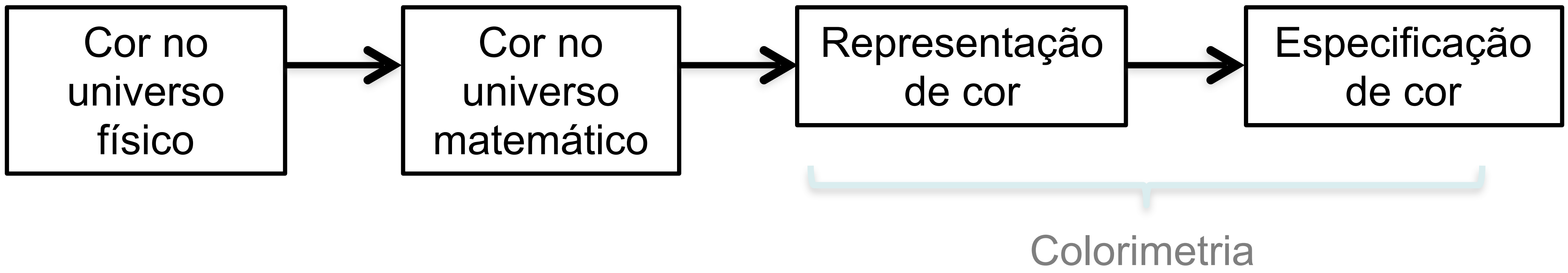
Instituto de Matemática

Cor

Prof. Thales Vieira

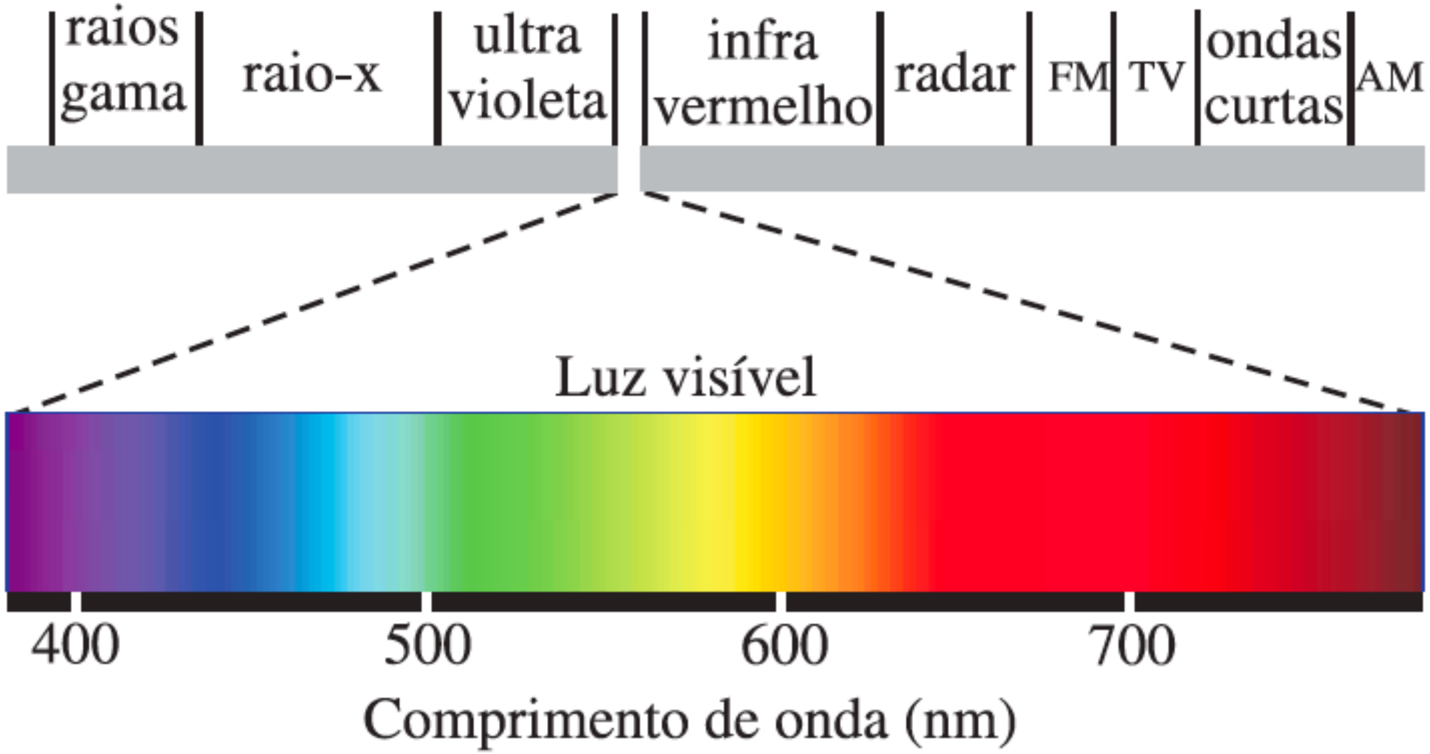
2014

O que é cor?


Cor no universo físico
Cor no universo matemático
Representação de cor
Especificação de cor
Colorimetria

Cor no universo físico

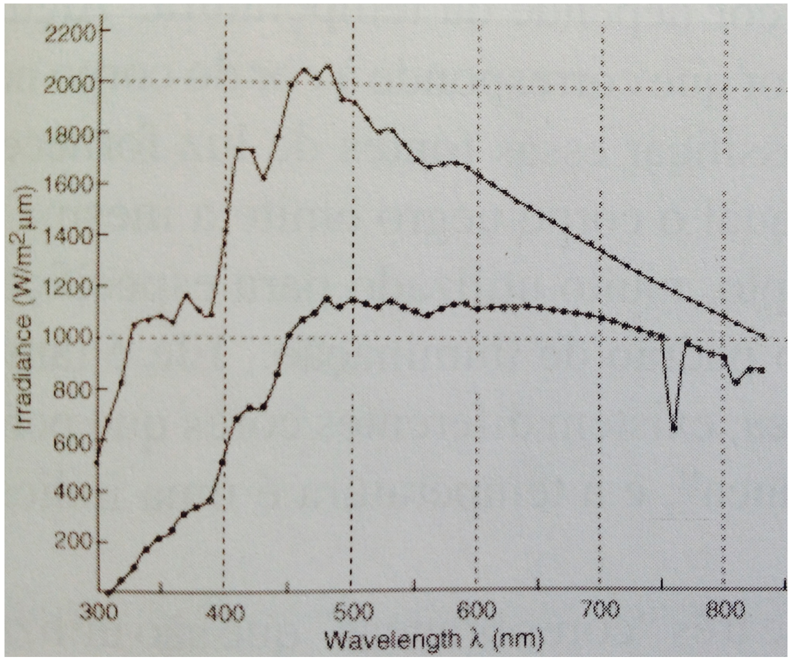
- Cor é uma sensação produzida no nosso cérebro pela luz que chega aos nossos olhos: problema psico-físico.
- Luz: radiação eletromagnética cujo comprimento de onda está na faixa visível do espectro (aproximadamente entre λ_a = 400nm e λ_b = 800nm)



Cor no universo físico

- *Energia radiante*: energia associada a uma onda eletromagnética
- Cor percebida pelo olho: combinação de radiações eletromagnéticas com diferentes comprimentos de onda e diferentes energias radiantes.
- *Função de distribuição espectral:* Associa a cada comprimento de onda λ de uma cor, sua quantidade de energia radiante E(λ) (geralmente sua unidade de medida é a irradiância).

irradiância



λ

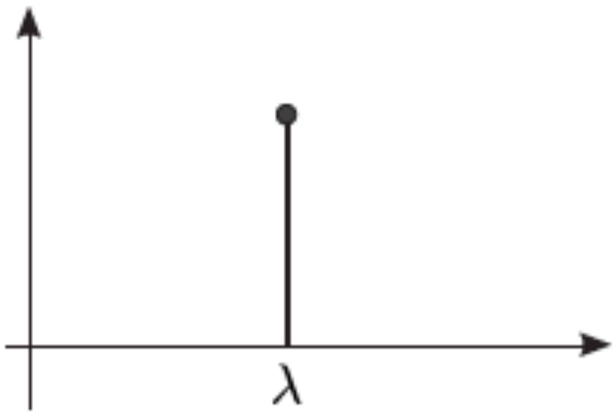
Cor no universo matemático

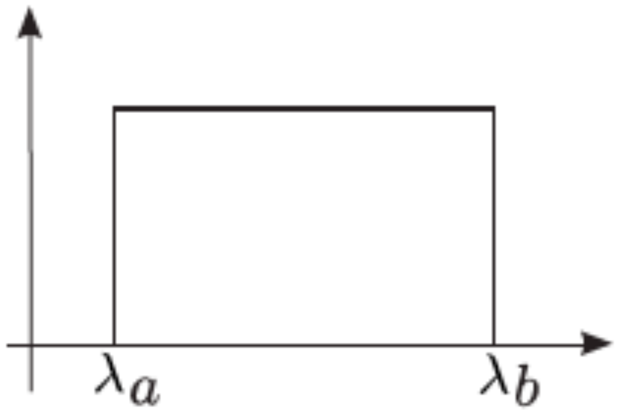
- Uma cor pode ser representada por sua função de distribuição espectral, ou seja, por uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

  Obs.: podemos restringir o domínio das funções ao intervalo $[\lambda_a, \lambda_b]$

- Definição: Uma cor que possui energia em apenas um comprimento de onda é chamada *cor espectral pura* ou *cor monocromática*

- Espaço (espectral) de cor $\mathcal{E}$: espaço de funções reais de uma variável: dimensão infinita!





Representação de Cor

Cor no universo matemático → Representação de cor

- Problema: Espaço espectral de cor $\mathcal{E}$ tem dimensão infinita

- Solução: Obter um espaço de dimensão finita para representar $\mathcal{E}$ realizando uma amostragem pontual no domínio $[\lambda_a, \lambda_b]$ das funções de distribuição espectral

1. Tomamos uma partição $\lambda_a = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n = \lambda_b$
2. Associamos a cada cor $C(\lambda) \in \mathcal{E}$ o vetor:

$$(C(\lambda_1), \ldots, C(\lambda_n)) \in \mathbb{R}^n$$

Transformação de Representação: $R \colon \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}^n$

$$R(C(\lambda)) = (C(\lambda_1), \ldots, C(\lambda_n)) \in \mathbb{R}^n$$

Linearidade: $R(tC_1(\lambda) + C_2(\lambda)) = tR(C_1(\lambda)) + R(C_2(\lambda))$

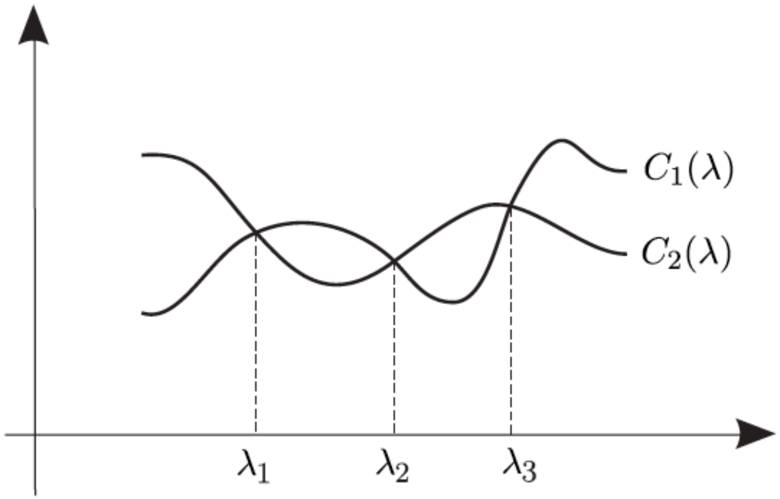
Reconstrução de Cor

Cor no universo matemático $\leftarrow$ Representação de cor

Interpretação 1: Devemos interpolar as amostras $C(\lambda_i)$ obtendo a cor original $C(\lambda)$;

Interpretação 2: A Transformação de Representação $R\colon \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}^n$ deve ser invertível.

Impossível garantir a reconstrução exata no caso geral!



Questões:

1. Quantas amostras (n) tomar para representar o espaço de cor?

2. Existe um método de interpolação que reconstrói a cor original a partir de um vetor de representação em algum caso específico?

Reconstrução de Cor: voltando para física…

Células fotossensíveis do olho:

Bastonetes: captam luz de baixa intensidade;
Cones: captam luz de média e alta intensidade. Existem três tipos que amostram:

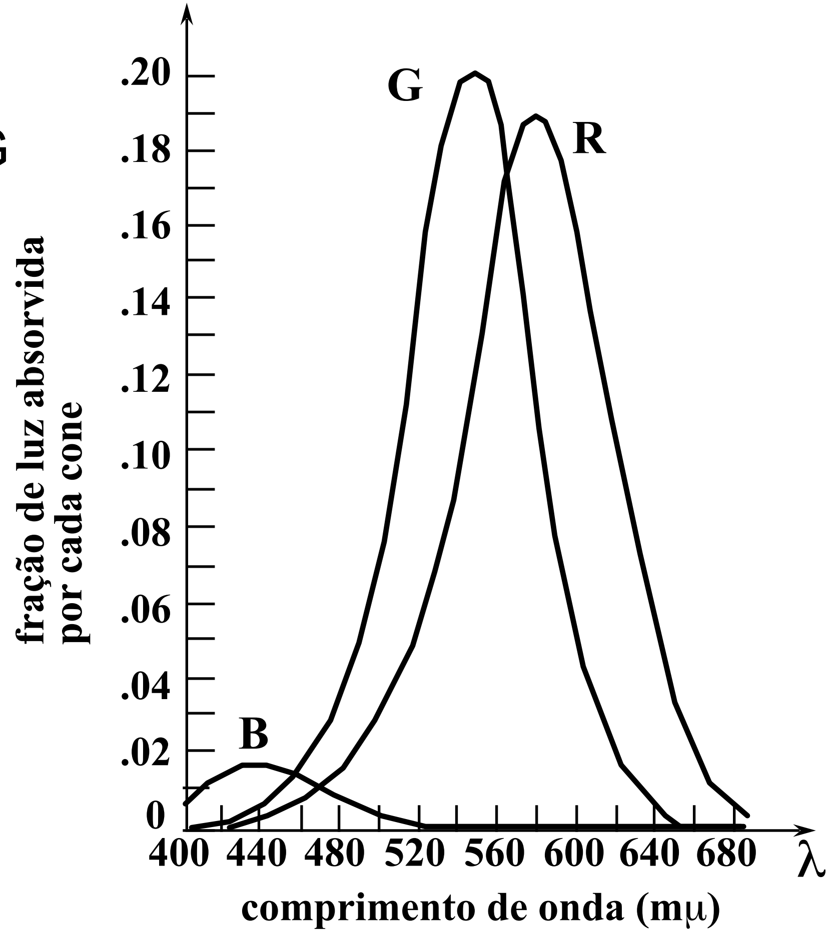
1. faixa de comprimento de onda longo (red) R
2. faixa de comprimento de onda médio (green) G
3. faixa de comprimento de onda curto (blue) B

O próprio olho realiza a chamada amostragem RGB!

Sistema de Young e Helmholtz

Representa o espaço de cor $\mathcal{E}$ com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, onde cada vetor tem os componentes R, G, B da cor espectral.

$$c_i = \int_0^\infty C(\lambda) s_i(\lambda) d\lambda$$



Reconstrução de Cor usando espaço tricromático

Reta acromática

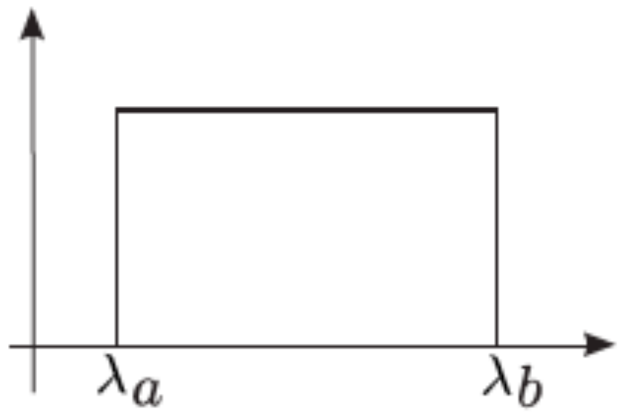
A cor branca é constituída de uma combinação das diversas cores espectrais com a mesma energia radiante, ou seja:

$$f(\lambda) = cte$$

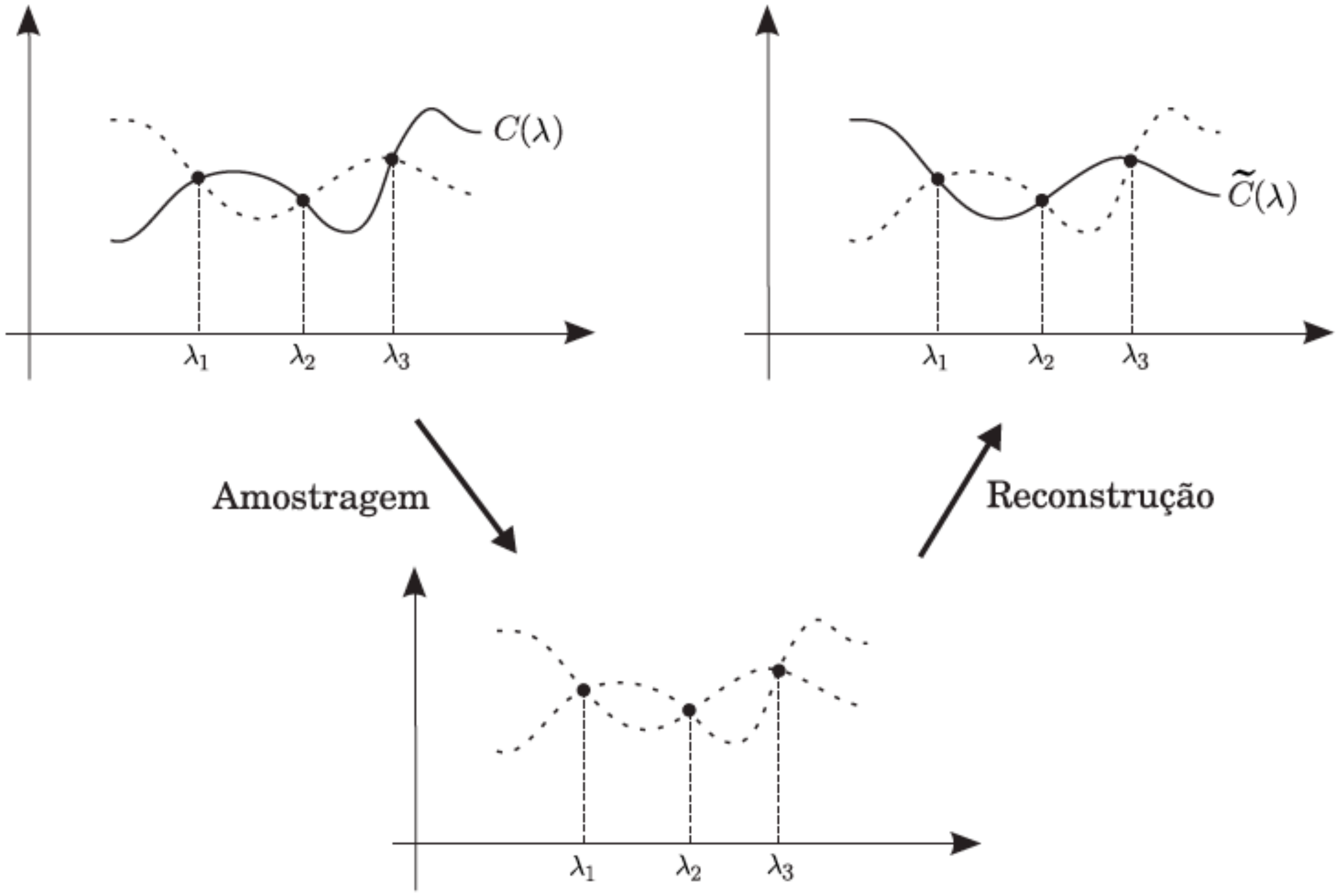
Consequentemente sua representação no espaço tricromático é dada por um vetor

$$(t, t, t) = t(1, 1, 1), t > 0$$

Esta é a chamada reta acromática do espaço tricromático de cor.



Reconstrução de Cor usando espaço tricromático



Duas cores perceptualmente iguais mas com funções de distribuição espectral distintas são chamadas **metaméricas**.

Sistemas físicos receptores

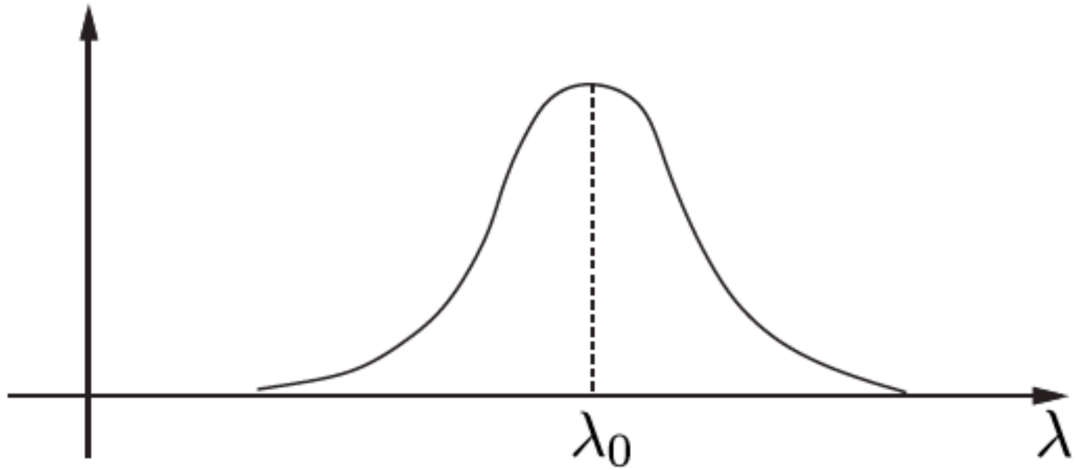
Realizam uma amostragem da função de distribuição espectral

Exemplos: olho humano, câmeras de vídeo e *scanners*.

Possuem n sensores $s_1, s_2, \ldots, s_n$ que amostram a função de distribuição espectral usando diferentes funções de resposta espectral.

$$C(\lambda) \mapsto (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$c_i = \int_0^\infty C(\lambda) s_i(\lambda) d\lambda$$



Sensor ideal: realizam uma amostragem pontual de C(λ).

$$s_i(\lambda) = 1 \quad \text{se} \quad \lambda = \lambda_0$$

$$s_i(\lambda) = 0 \quad \text{senão.}$$

Sistemas físicos emissores

Emitem luz com uma certa distribuição espectral

Exemplos: TV, telefone celular, projetor

Reconstrói uma cor $\tilde{C}(\lambda)$ usando:

1. Uma base de funções $\{P_1(\lambda), \ldots, P_n(\lambda)\}$ **chamada base de cores primárias;**

2. Uma amostra $c_r = (c_1, \ldots, c_n)$.

$$\tilde{C}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k P_k(\lambda)$$

Gamute do sistema: conjunto de cores que podem ser construídas com as cores primárias

Reconstrução Metamérica

Problema de reconstrução metamérica: Considere uma cor dada por sua função de distribuição espectral C(λ) e seja R_1 um sistema de reconstrução de cor com base de cores primárias { $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$, $P_3(\lambda)$ }. Determinar os coeficientes c_1, c_2 e c_3 de modo que a cor reconstruída

$$\tilde{C}(\lambda) = c_1 P_1(\lambda) + c_2 P_2(\lambda) + c_3 P_3(\lambda)$$

seja metamérica à cor original C(λ).

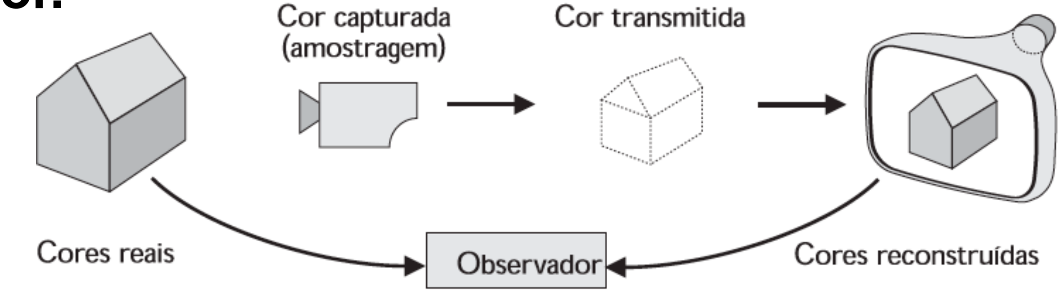
Assim garantimos que perceptualmente a cor reconstruída é perceptualmente igual à original!

Solução: Considere a cor espectral pura de comprimento de onda λ indicada por δ(λ). A reconstrução metamérica de δ(λ) no sistema R_1 é dada por

$$\delta(\lambda) = c_1(\lambda) P_1 + c_2(\lambda) P_2 + c_3(\lambda) P_3$$

Variando a cor pura λ, temos 3 funções $c_1(\lambda)$, $c_2(\lambda)$, $c_3(\lambda)$ chamadas **funções de reconstrução de cor.**

Como determinar os valores c_1, c_2 e c_3?



Color sampling

Reconstrução Metamérica

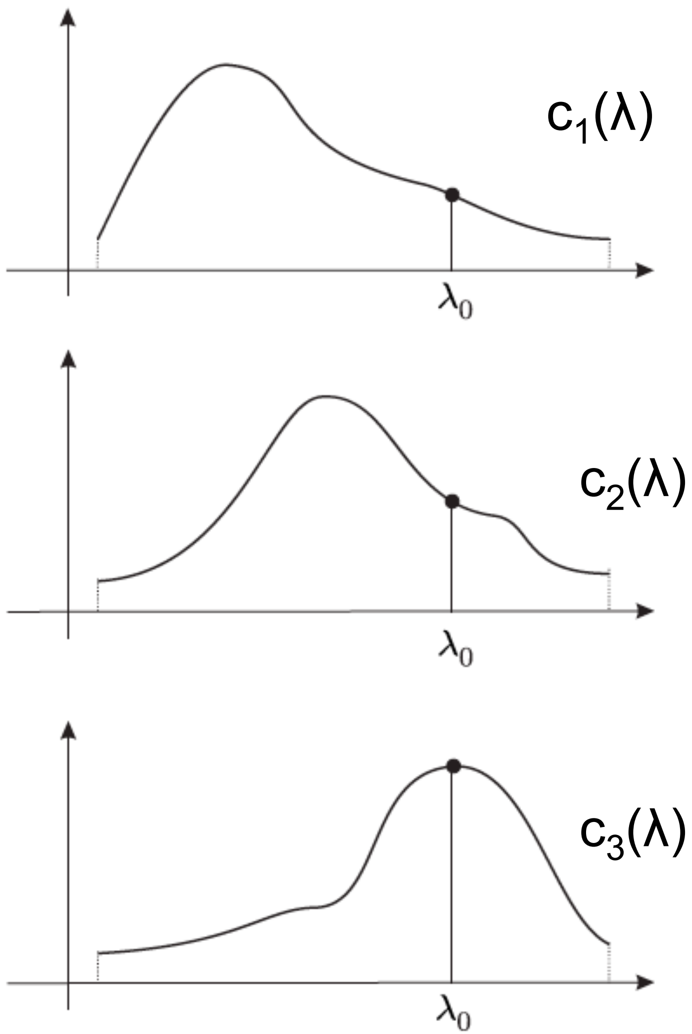
As funções $c_1(\lambda)$, $c_2(\lambda)$, $c_3(\lambda)$ definem a curva chamada mapa das cores espectrais

$$\varphi\colon\ [\lambda_a, \lambda_b] \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(\lambda) = (c_1(\lambda), c_2(\lambda), c_3(\lambda))$$

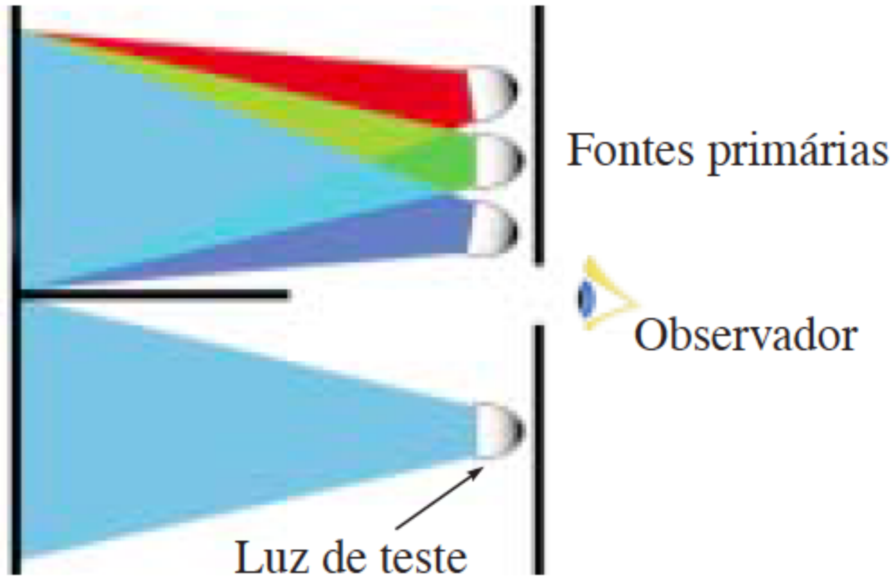
O que significa cada ponto da curva?

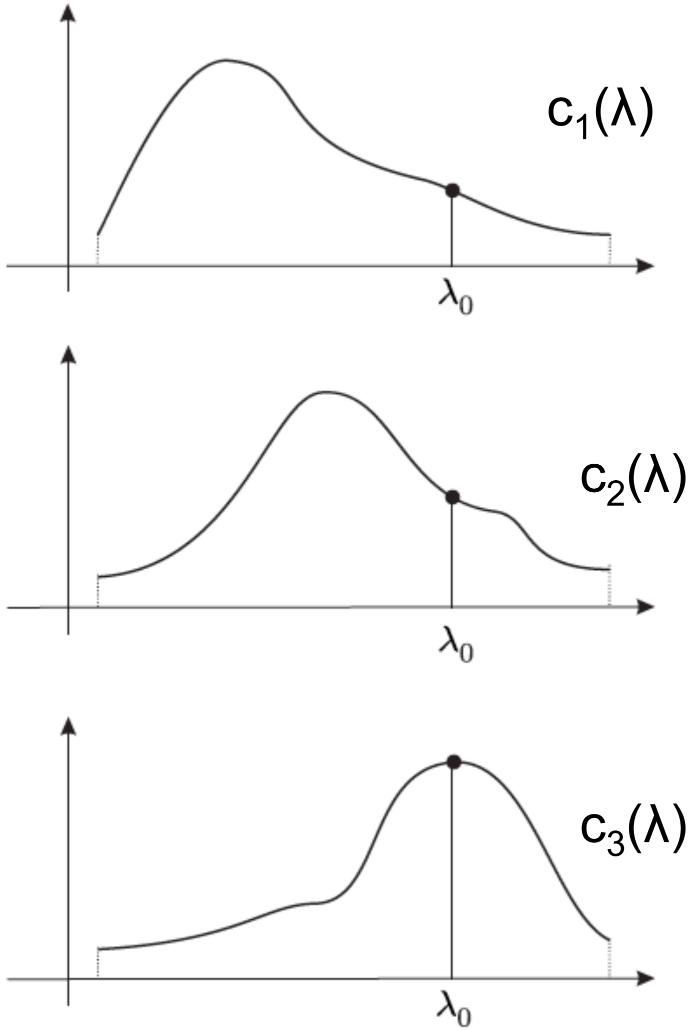
Applet



funções de reconstrução de cor

Obtendo funções de reconstrução de cor experimentalmente





funções de reconstrução de cor

1. Ajuste a intensidade das fontes primárias resultando na cor branca e anote as intensidades w_1, w_2 e w_3;
2. Usando luzes monocromáticas de teste, ajuste as intensidades b_1, b_2, b_3 das fontes primárias para obter cores perceptualmente iguais

$$c_k = \frac{b_k}{w_k}, k = 1, 2, 3.$$

Reconstrução Metamérica

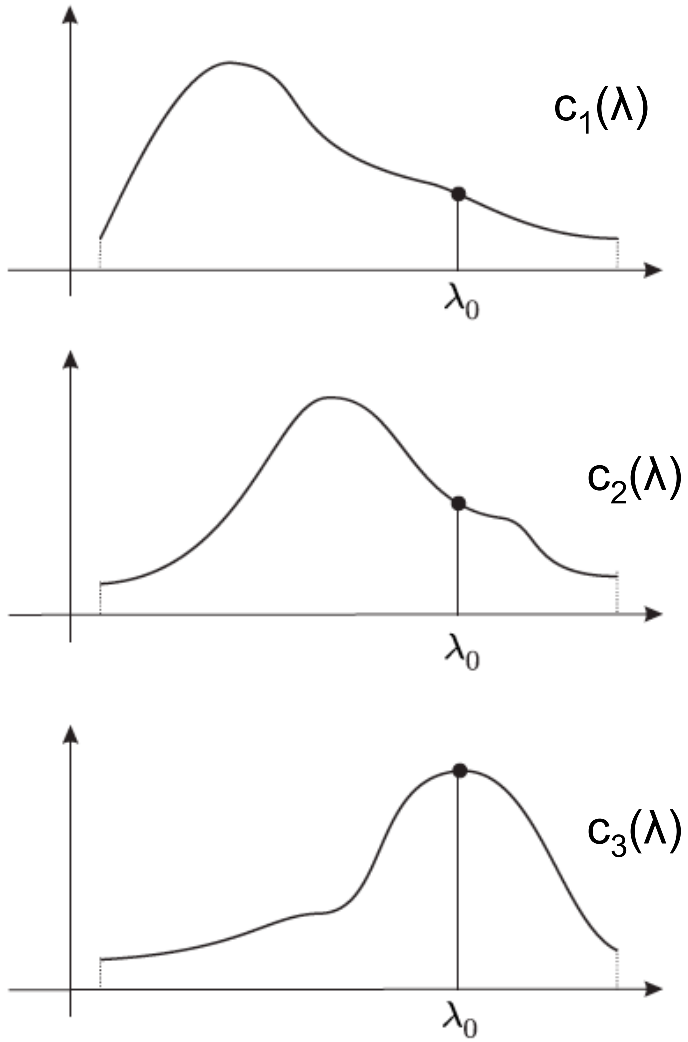
Problema de reconstrução metamérica: Considere uma cor dada por sua função de distribuição espectral C(λ) e seja R_1 um sistema de reconstrução de cor com base de cores primárias { $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$, $P_3(\lambda)$ }. Determinar os coeficientes c_1, c_2 e c_3 de modo que a cor reconstruída

$$\tilde{C}(\lambda) = c_1 P_1(\lambda) + c_2 P_2(\lambda) + c_3 P_3(\lambda)$$

seja metamérica à cor original C(λ).

Teorema de reconstrução metamérica: As funções de reconstrução de cor resolvem o problema de reconstrução metamérica. Os coeficientes c_1, c_2 e c_3 da equação de reconstrução são dados por

$$c_i = \int_0^\infty C(\lambda) c_i(\lambda) d\lambda$$

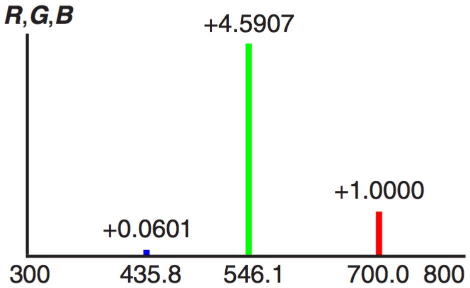


funções de reconstrução de cor

Funções de reconstrução de cor: padrão CIE-RGB

Base de cores primárias formada pelas cores monocromáticas:

1. R(λ): Vermelho (700 *nm*)
2. G(λ): Verde (546 *nm*)
3. B(λ): Azul (435 *nm*)



Valores negativos !!!
Impossível representar cores nessa faixa do espectro nesse sistema.

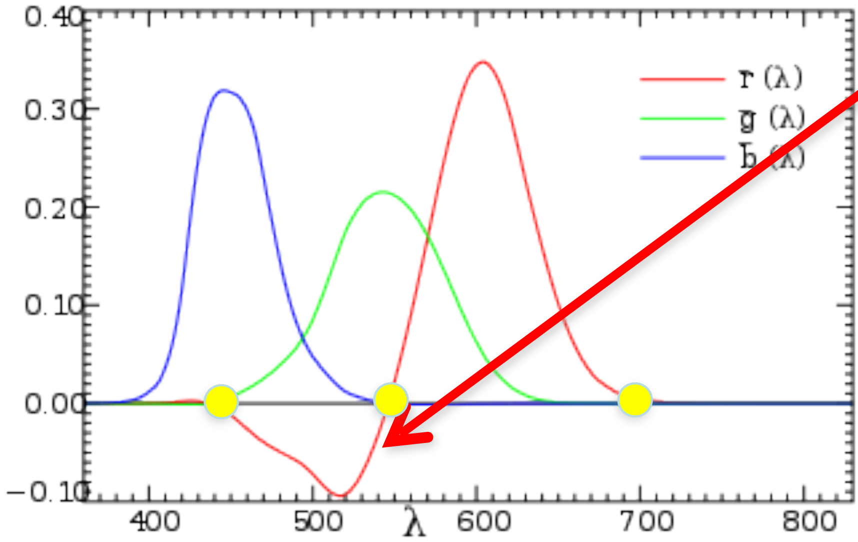
Explicação:

Se não é possível representar C na base R, G, B, experimente somar uma quantidade de R em C:

$$\tilde{C} + rR = gG + bB$$

$$\tilde{C} = -rR + gG + bB$$

Funções de reconstrução de cor do padrão CIE-RGB obtidas pelo experimento anterior:



Obs.: A área das curvas é normalizada

Pelo Teorema de Reconstrução Metamérica, dado C qualquer:

$$r = \int_0^\infty C(\lambda)R(\lambda)d\lambda$$

$$g = \int_0^\infty C(\lambda)G(\lambda)d\lambda$$

$$b = \int_0^\infty C(\lambda)B(\lambda)d\lambda$$

Geometria do Espaço de Cor

Seja C uma cor representada numa base, tal que:

$$\tilde{C}(\lambda) = c_1 P_1(\lambda) + c_2 P_2(\lambda) + c_3 P_3(\lambda)$$

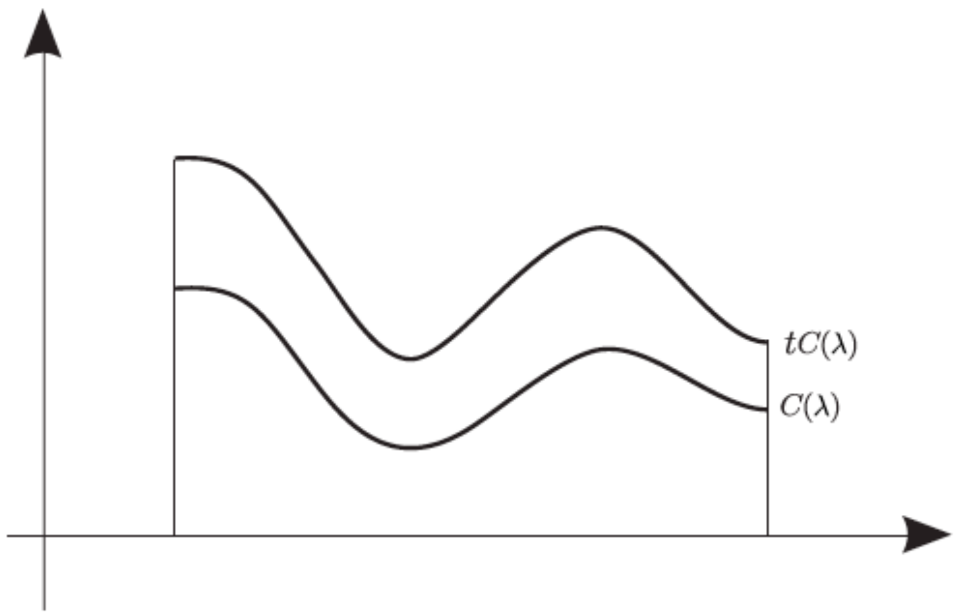
Vamos representar C no espaço de representação de cor tridimensional $\mathbb{R}^3$ gerado pela base {P_1, P_2, P_3}, ou seja, como (c_1, c_2, c_3).

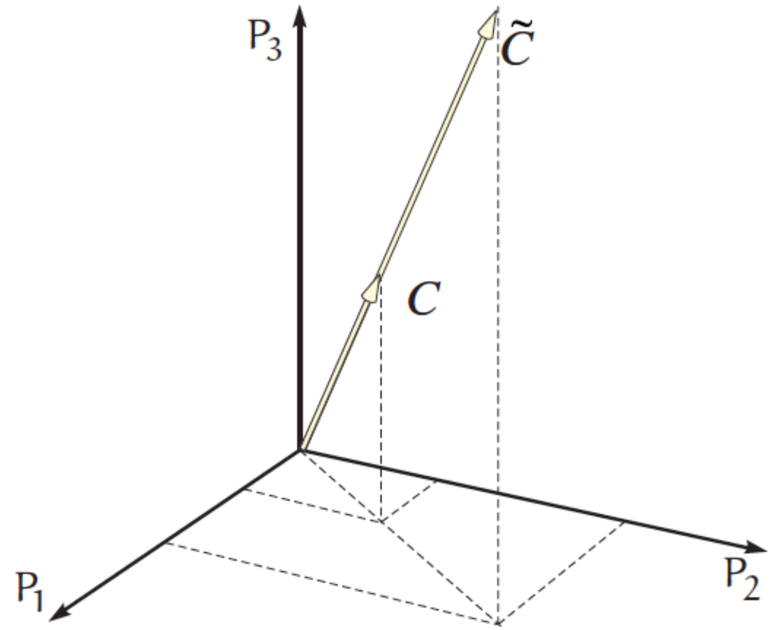
Luminância

Dada uma cor com distribuição espectral C(λ), e um real t > 0, então $t \cdot C(\lambda)$ gera uma outra cor $\tilde{C}(\lambda)$ que tem apenas sua energia alterada em relação a original.

A luminância, ou luminosidade, está relacionada com essa energia. Quanto maior t, maior a energia da cor, e quanto menor t, menor a energia.

Multiplicar uma distribuição espectral por um real t equivale a multiplicar seu vetor (c_1, c_2, c_3) por t, ou seja, a cor $\tilde{C}(\lambda)$ será representada pelo vetor (tc_1, tc_2, tc_3). (Prove!)



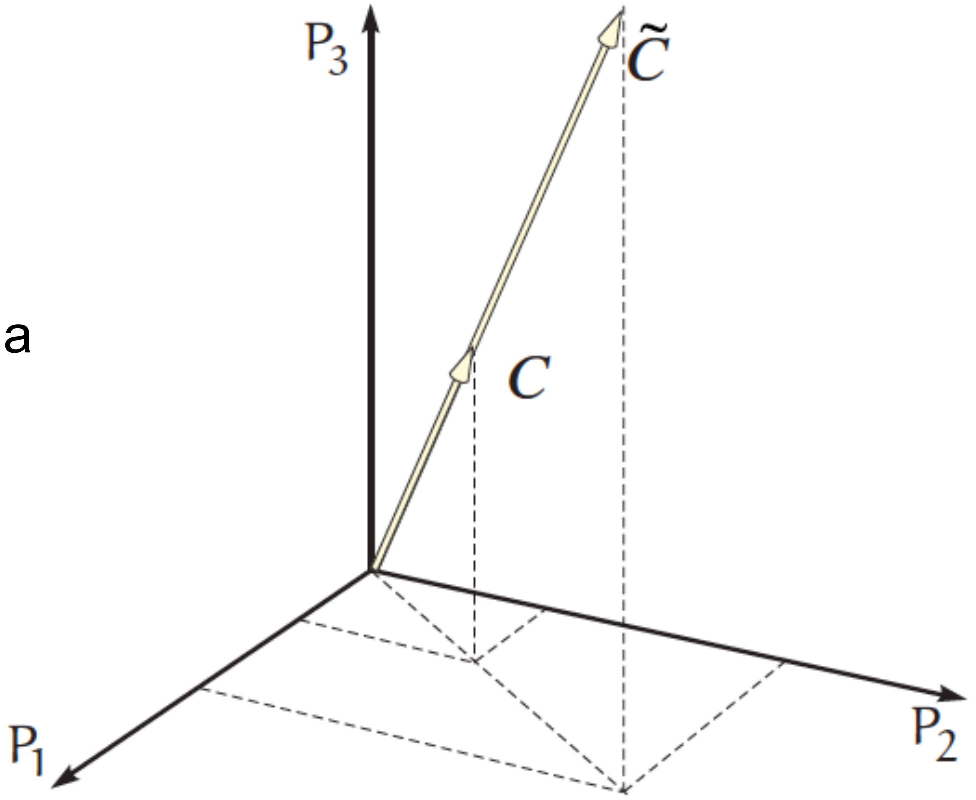


Luminância

Informação de cor:

1. Croma
2. Luminância

Uma reta do espaço vetorial formado pela base de cores primárias representa um único croma com diferentes luminâncias



Classes de cores segundo o espaço de representação de cor:

1. Cores visíveis que podem ser reconstruídas na base: coordenadas positivas
2. Cores visíveis que não podem ser reconstruídas na base: coordenadas negativas
3. Cores invisíveis (com energia apenas fora do espectro visível. Ex: infravermelho, ultravioleta…)

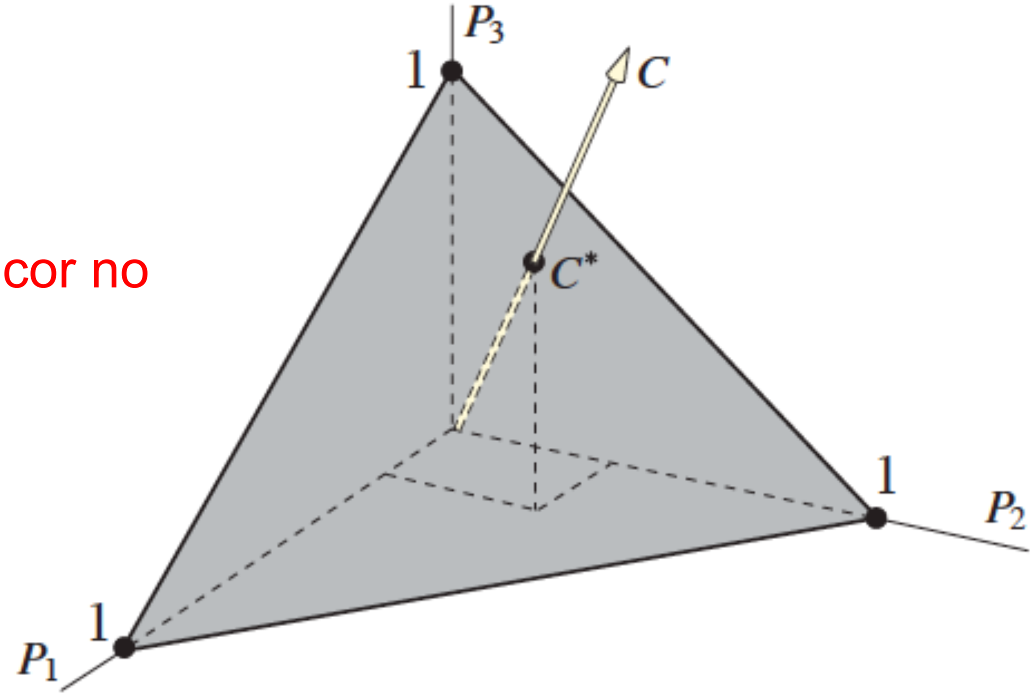
Triângulo de Maxwell

Objetivo: Representar informação de croma da cor

Solução:

1. Croma de cores visíveis e que podem ser reconstruídas na base é definido por semiretas que saem da origem em direção ao primeiro octante;
2. Essas retas cruzam o plano x+y+z = 1 apenas uma vez!
3. Este plano, limitado pelos vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1) terá um representante de cada cor e este subconjunto é chamado Triângulo de Maxwell.

Como achar o representante de uma cor no triângulo de Maxwell?



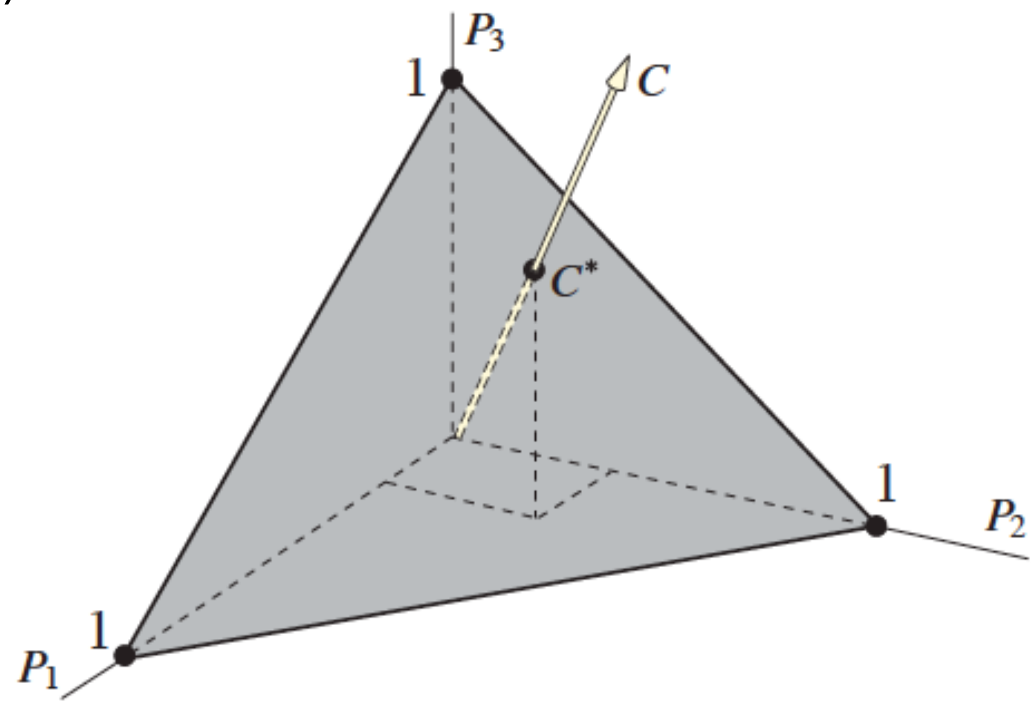
Obs.: Branco padrão

Não podemos tomar a reta de cromaticidade até o infinito, pois os dispositivos finitos tem capacidade de emissão finita.

Branco padrão: definido como (b_r, b_g, b_b). Todas as outras cores são normalizadas em relação ao branco.

Dada uma cor (c_r, c_g, c_b), temos:

$$\left(\frac{c_r}{b_r}, \frac{c_g}{b_g}, \frac{c_b}{b_b}\right)$$



Sólido de Cores e Diagrama de Cromaticidade

Propriedades do sólido de cores visíveis

1. O sólido é um cone: se c é visível, então tc também é visível, t real positivo.
2. O sólido é convexo: Se c_1 e c_2 são visíveis, (1-t) c1 + t c2 é visível, $0 \leq t \leq 1$.
3. Cores espectrais puras estão na fronteira do sólido de cor.

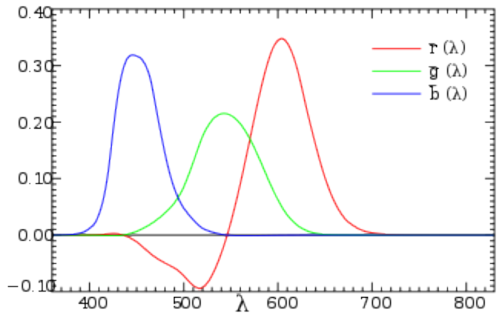
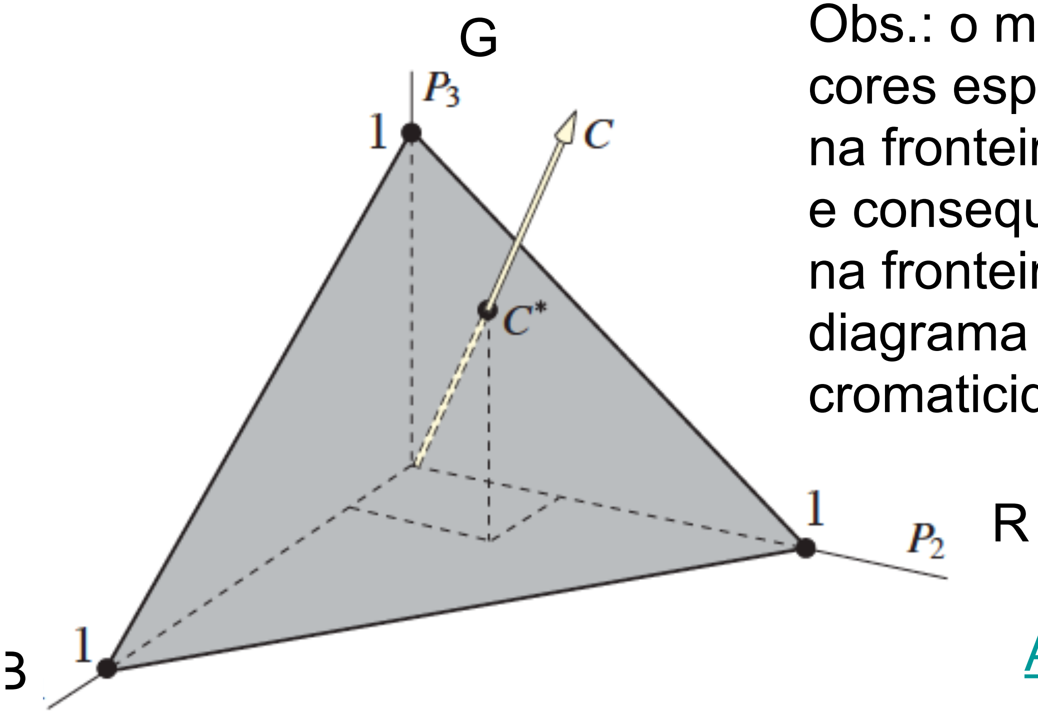
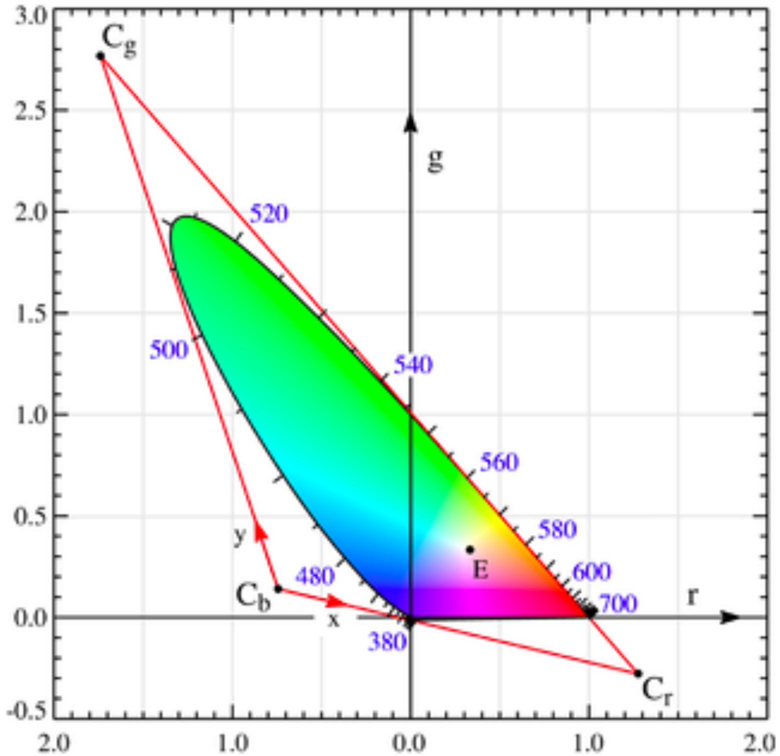


Diagrama de cromaticidade: Projeção radial do cone de cor no triângulo de Maxwell, e em seguida no plano RG.



Obs.: o mapa das cores espectrais está na fronteira do sólido, e consequentemente na fronteira do diagrama de cromaticidade.

[Applet]



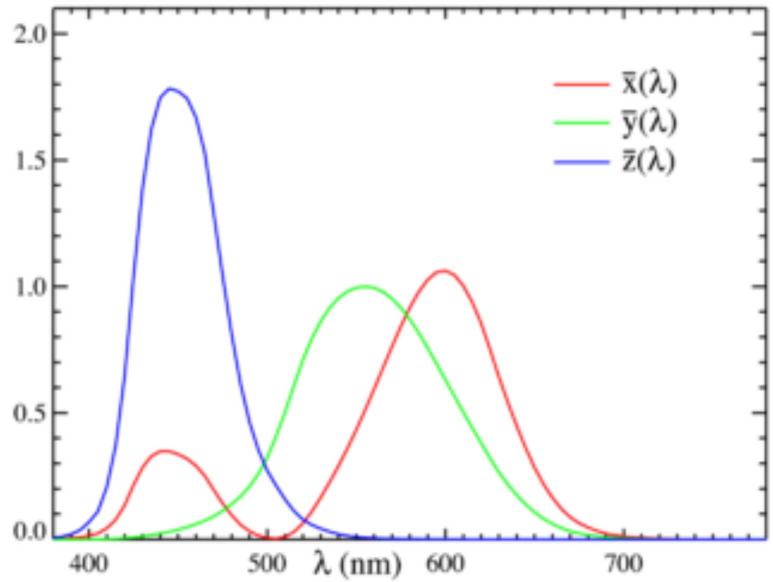
Sistema XYZ

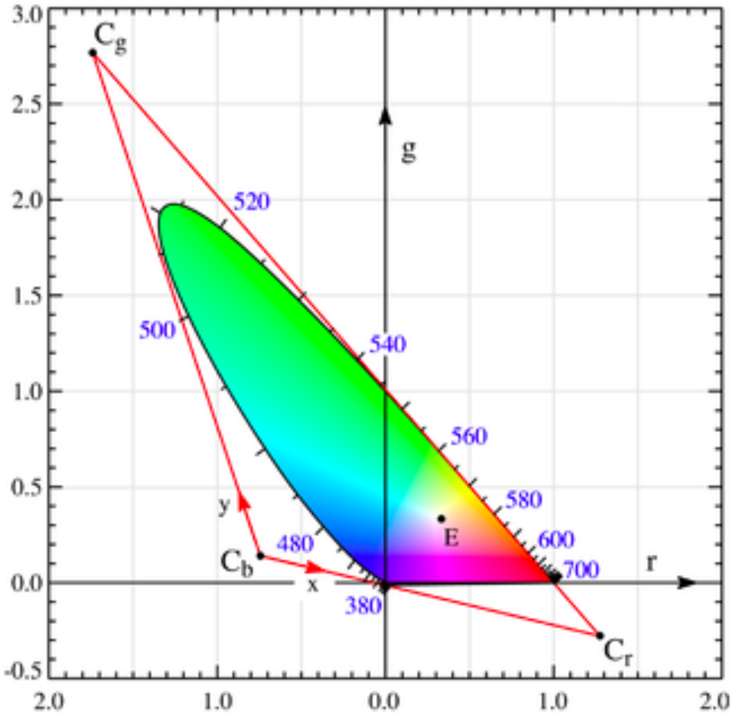
Padrão CIE-RGB não é capaz de representar todas as cores visíveis!

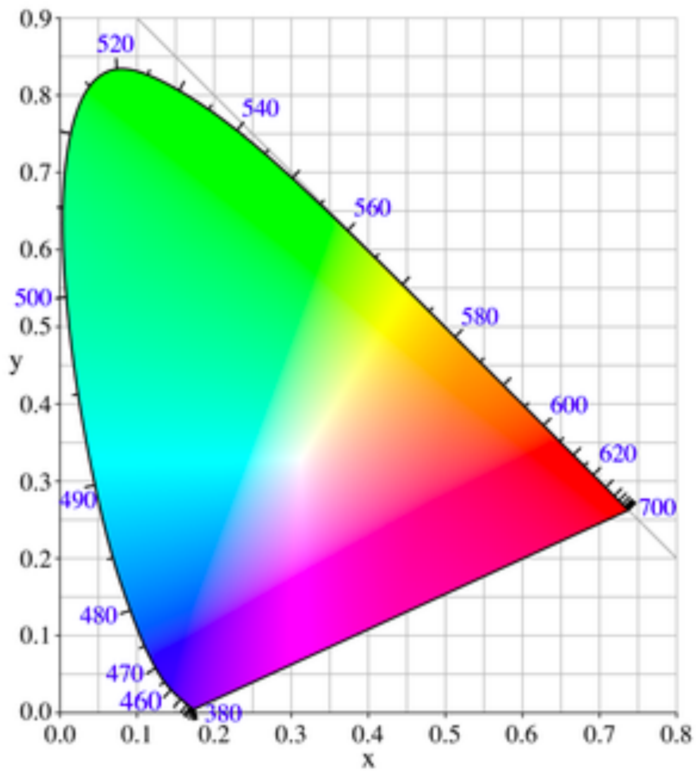
Solução: sistema XYZ

Usa fontes primárias imaginárias (invisíveis)

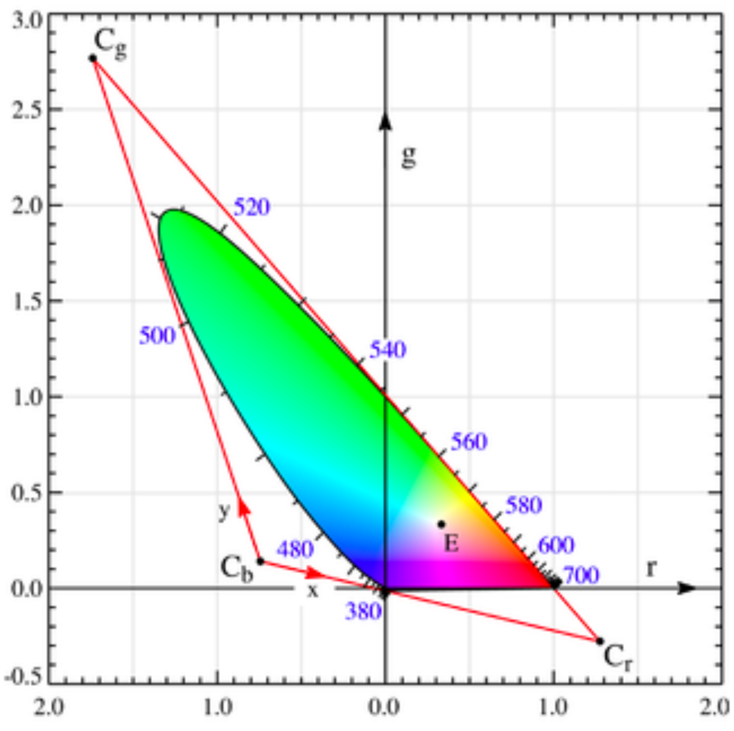
Gera funções de reconstrução positivas!

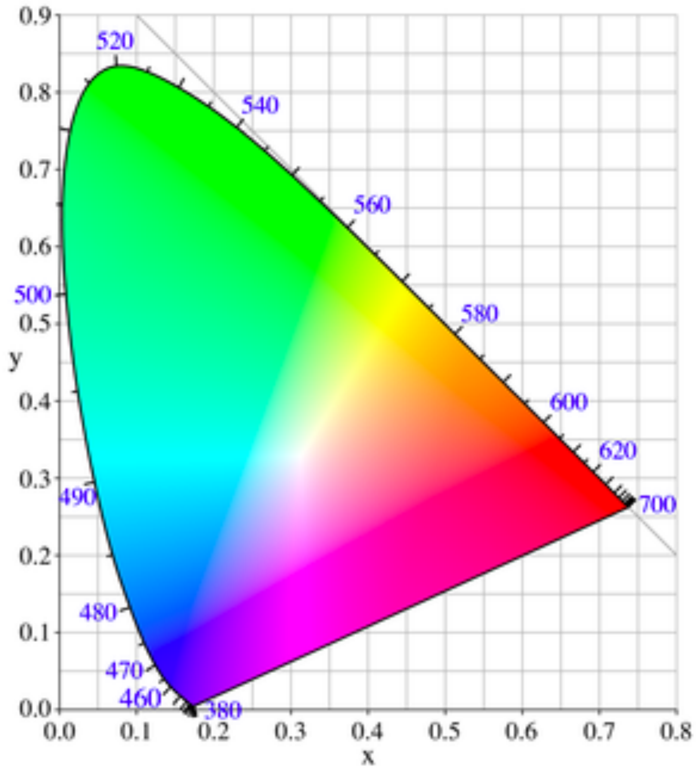


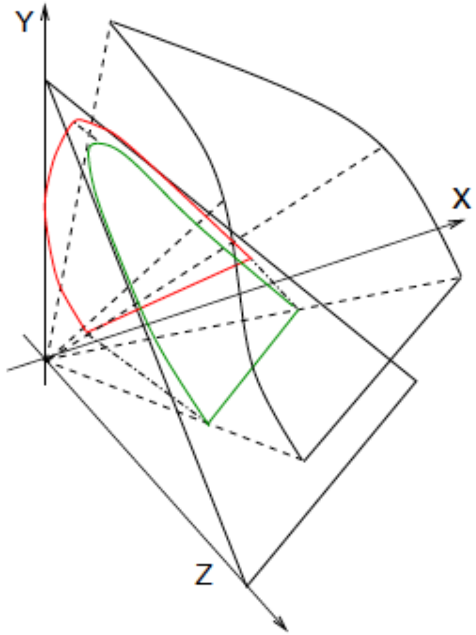




Sistema XYZ







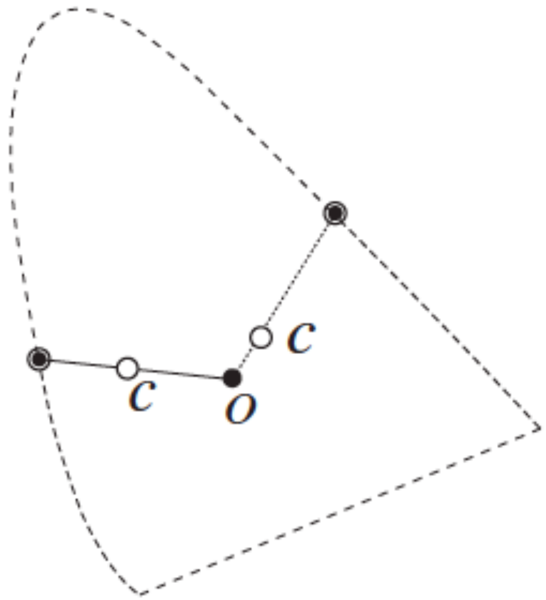
Mudança de coordenadas: Transformação linear

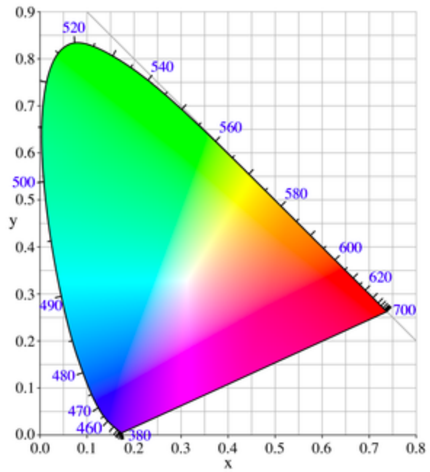
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.489989 & 0.310008 & 0.200003 \\ 0.176962 & 0.812400 & 0.010638 \\ 0.000000 & 0.009999 & 0.990001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.364666 & -0.896583 & -0.468083 \\ -0.515155 & 1.426409 & 0.088746 \\ 0.005203 & -0.014407 & 1.009204 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Comprimento de onda dominante

Dada uma cor c, traça-se uma semireta do ponto acromático (branco) até a representante de c no diagrama de cromaticidade. Seu comprimento de onda dominante é o da cor pura que é intersecção da semireta com o bordo do diagrama.

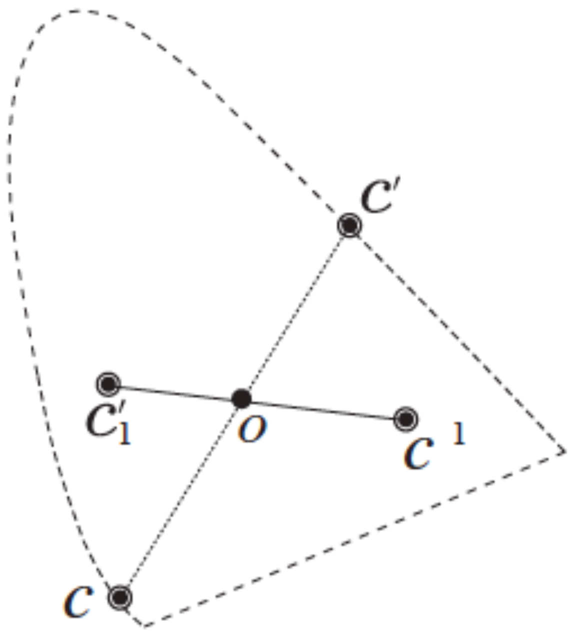




Cor complementar

Dada uma cor pura c, traça-se uma semireta passando por seu representante no diagrama passando pelo ponto acromático. A cor complementar é aquela no bordo oposto do diagrama.

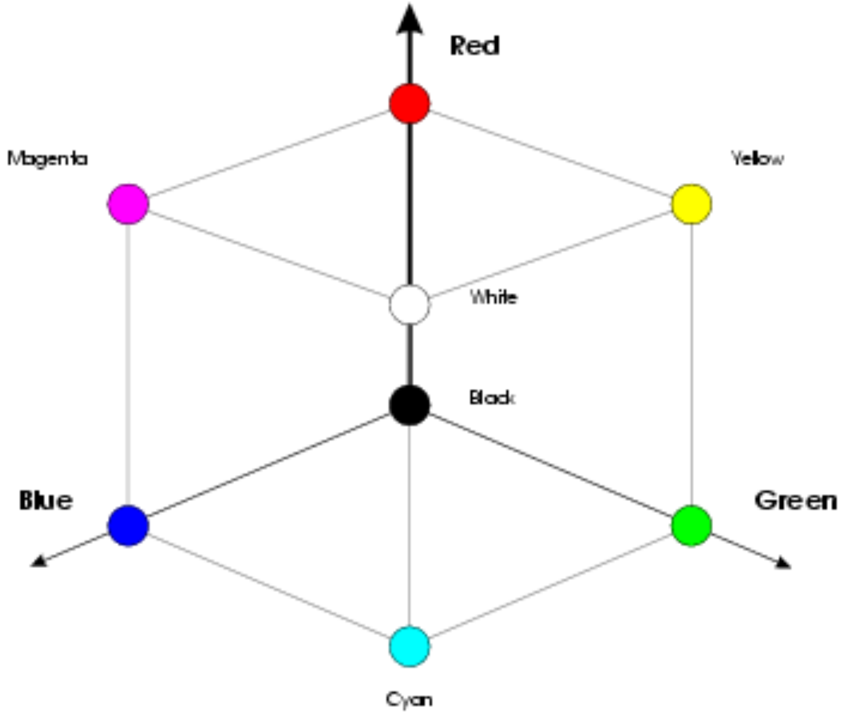
De modo geral, uma cor qualquer c tem como complementar aquela cor cujo representante combinado com o representante de c é o branco.



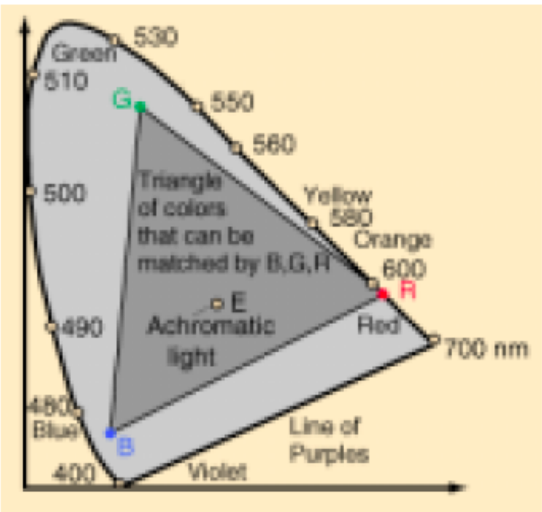
Sistema RGB do monitor (mRGB)

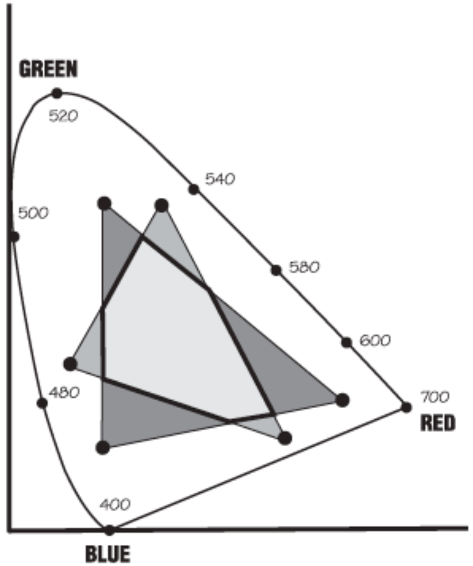
Base de cores primárias do tipo RGB, dependente do *hardware*

Cada cor primária da base tem intensidade máxima limitada, limitando o sólido de cor do sistema a um paralelepípedo, posteriormente normalizado para o cubo unitário.



É necessário realizar conversões entre diferentes *hardwares*!





Sistemas de Crominância-Luminância (para hardware)

Objetivo: Decompor a cor em informação de luminância e crominância

1 - Luminância de uma cor (R, G, B) no sistema mRGB:

Y = 0.299 R + 0.587 G + 0.114 B

2 – Eliminação da luminância dos componentes:

R-Y, G-Y, B-Y

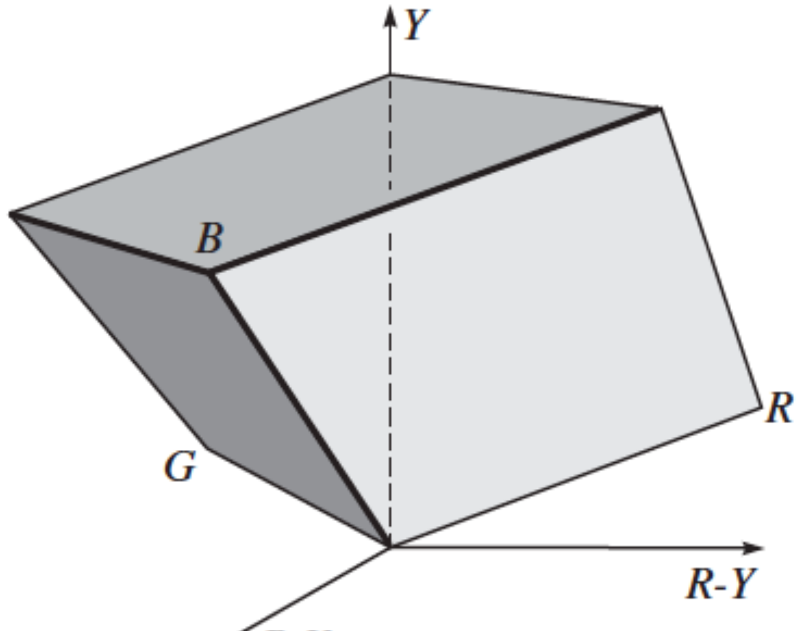
3 – Descarte: apenas duas dessas componentes são necessárias. Como G carrega boa parte da luminância, descartamos esta componente. Daí ficamos com:

Y = 0.299 R + 0.587 G + 0.114 B
R – Y = 0.711 R - 0.587 G – 0.114 B
B – Y = -0.299 – 0.587 G + 0.990 B

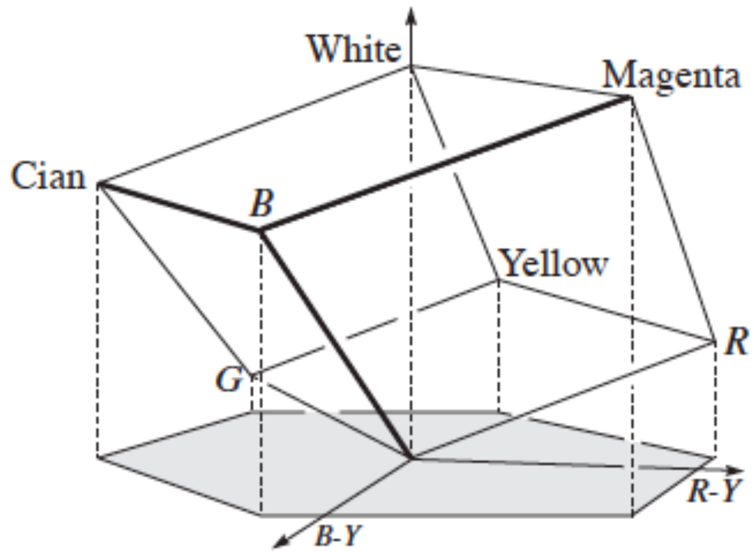
ou

$$\begin{pmatrix} Y \\ R-Y \\ B-Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.11 \\ 0.711 & -0.587 & -0.11 \\ -0.299 & -0.587 & 0.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

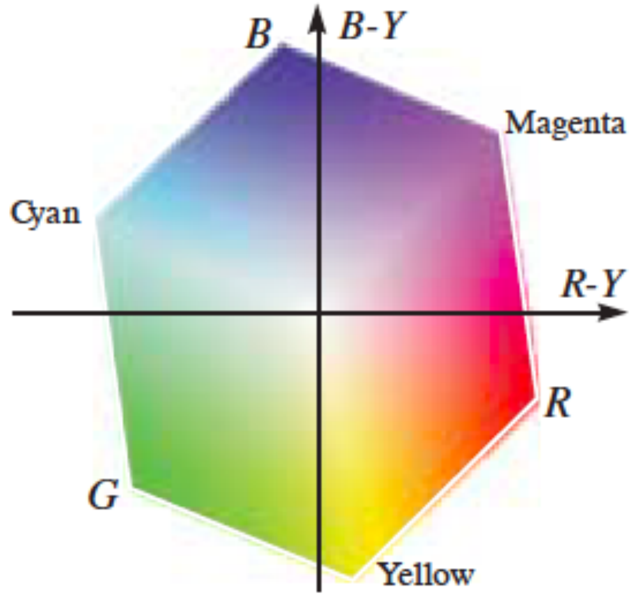
Sistemas de Crominância-Luminância (para hardware)



Sólido de cor no espaço Y, R-Y, G-Y



Projeção no diagrama de cromaticidade



Hexágono de cromaticidade

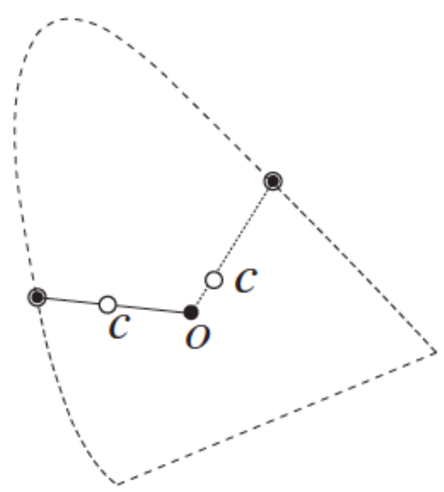
Sistema HSV (interfaces)

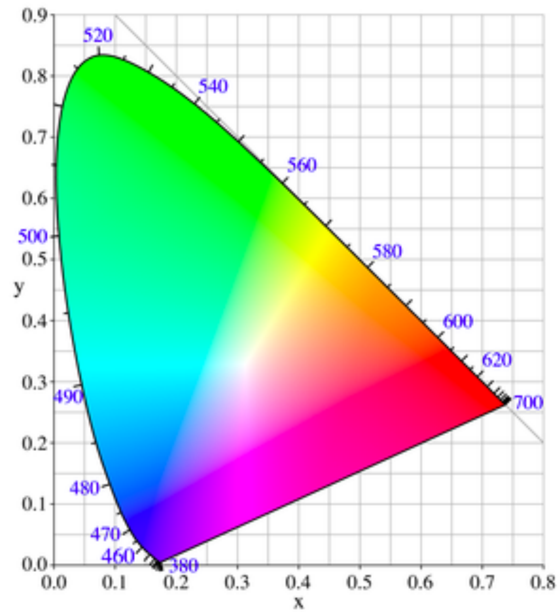
Baseado em sistemas de interface para seleção de cor intuitivos:

1. Seleção de crominância;
2. Seleção de luminância.

Conjunto de cromas é bidimensional. Como decompor?

1. Seleção de matiz (*hue*), ou seja cor monocromática do bordo do diagrama de cromaticidade;
2. Seleção de saturação: a partir da cor monocromática escolhida, percorre-se o caminho até o ponto acromático do diagrama de cromaticidade.



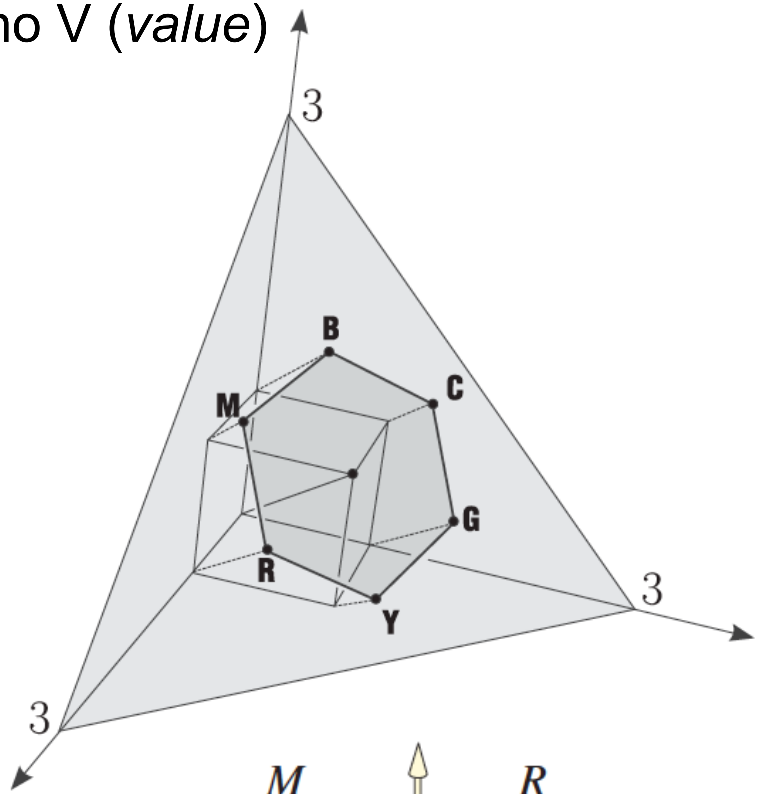


Sistema HSV (interfaces)

Luminância no sistema HSV: Substituída por brilho V (*value*)

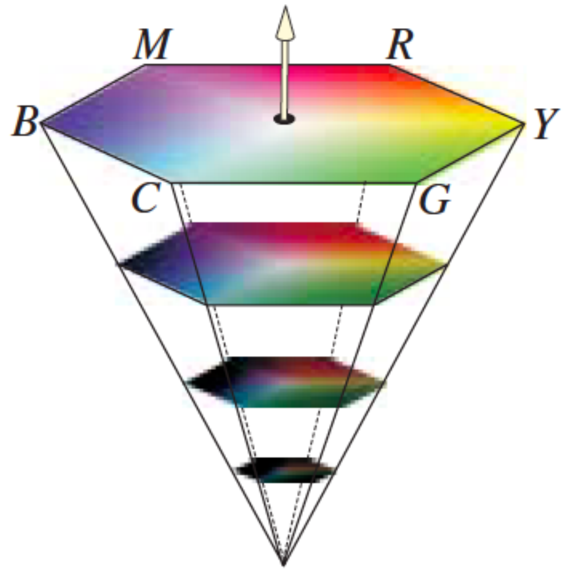
$$V(C) = \max \{C_R, C_G, C_B\}$$

Note que as cores que possuem mesmo brilho V estão sobre a superfície de um cubo de lado V.



Pirâmide HSV:

1. Para cada brilho t, defina um plano π_t que passa pelo ponto (t, t, t) e é ortogonal à diagonal do cubo RGB, e projete nele as cores do cubo RGB que estão sobre a superfície do cubo de lado t. Esta projeçao é um hexágono h_t.
2. Empilhando os hexágonos h_t em um eixo t (que representa brilho), formamos uma pirâmide de base hexagonal e vértice na origem.

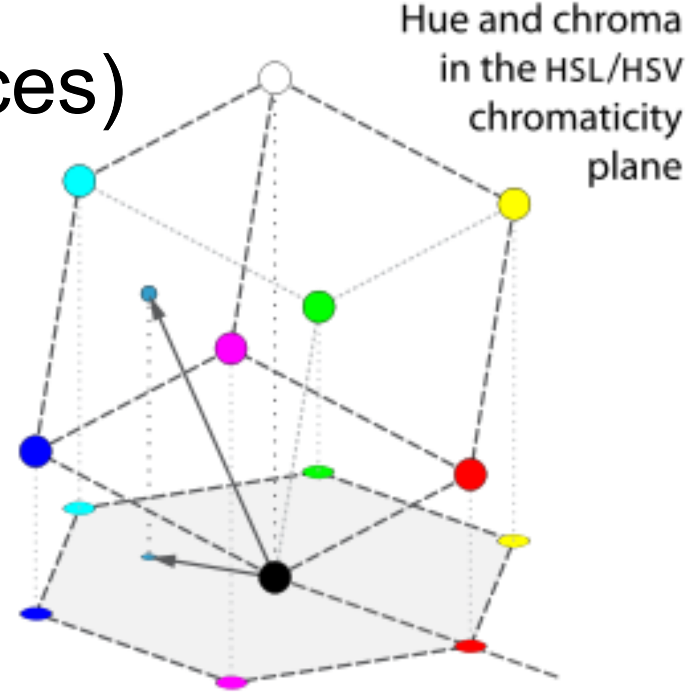


Sistema HSV (interfaces)

1. O Bordo de cada hexágono representa matiz, ou cores monocromáticas;

2. *Saturação diminui na direção do centro do hexágono*

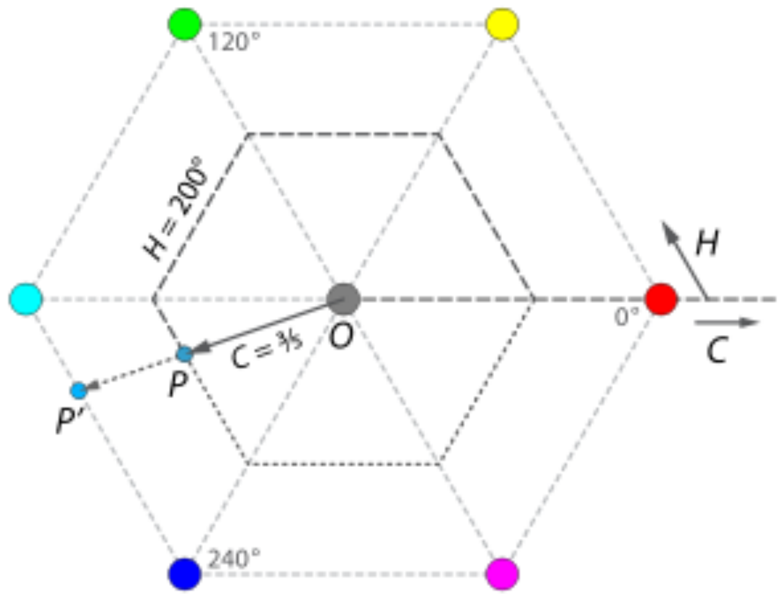
3. *Eixo da pirâmide é formado pelas cores acromáticas (tons de cinza)*

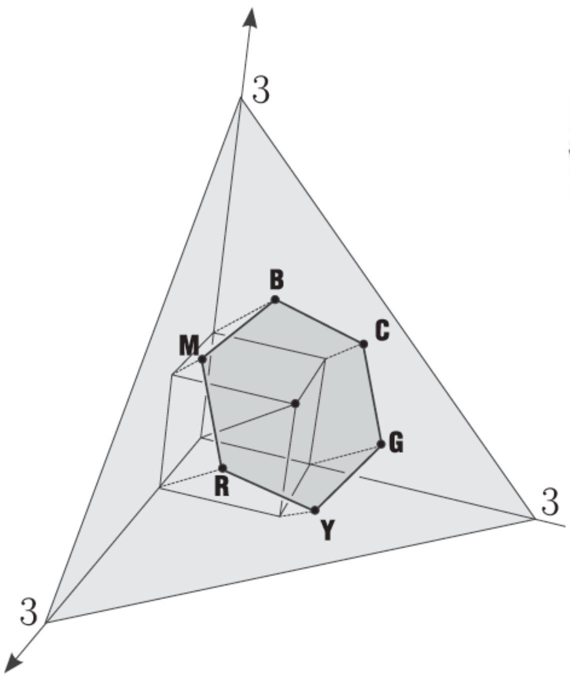


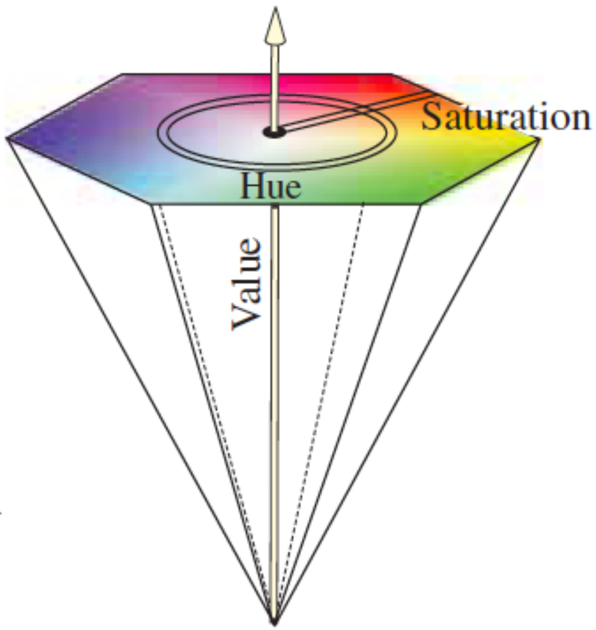
$R = 1/5$
$G = 3/5$
$B = 4/5$

$$C = \frac{OP}{OP'} = B - G = 4/5 - 1/5 = 3/5$$

$$H = 60° \times \left(4 + \frac{R-G}{C}\right) = 60° \times (4 - 2/3) = 200°$$







2ª Lista de Exercícios

Capítulo 5

5, 9, 11, 13, 14

http://www.im.ufal.br/professor/thales/icg.html

thalesv@gmail.com