Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Matemática

Imagem

Prof. Thales Vieira

2014

O que é uma imagem digital?

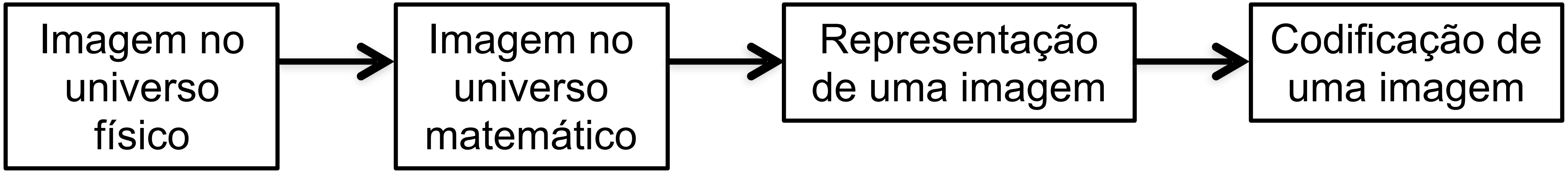


Imagem no universo físico

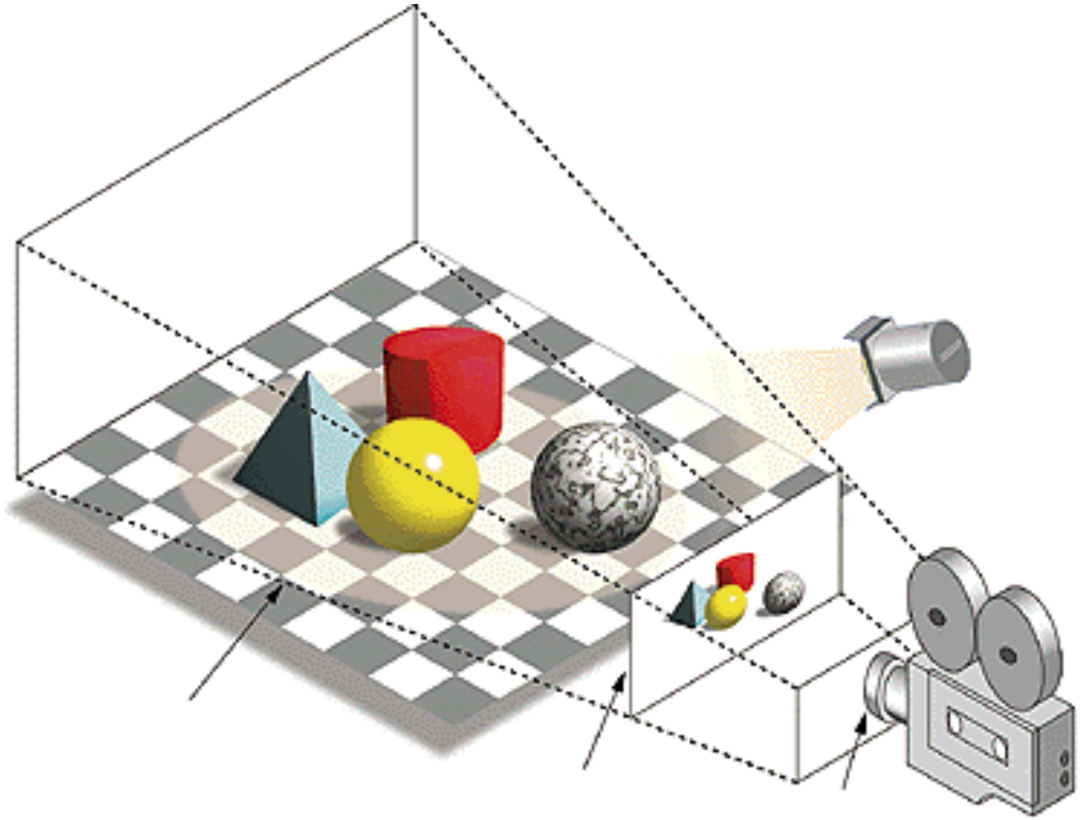
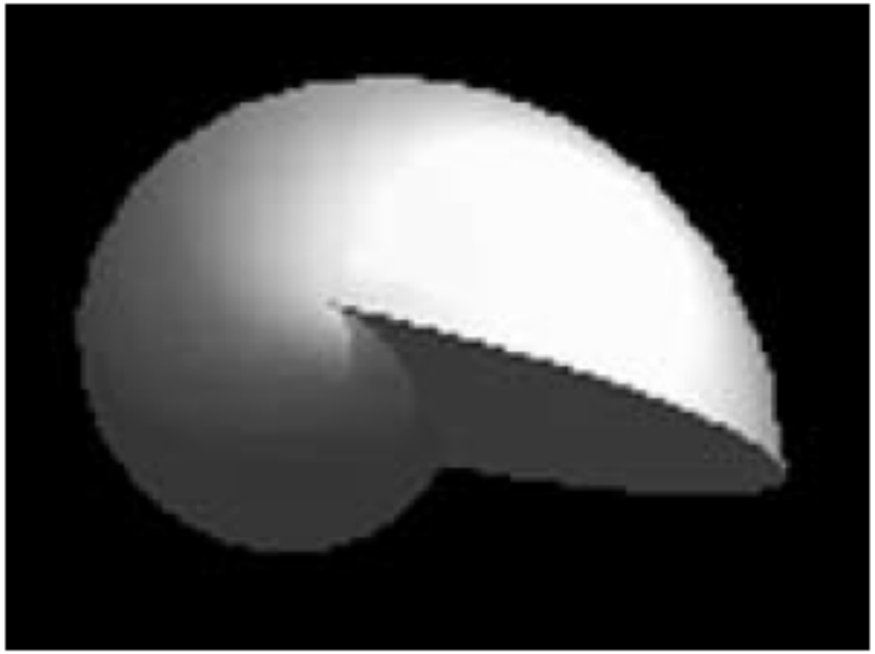
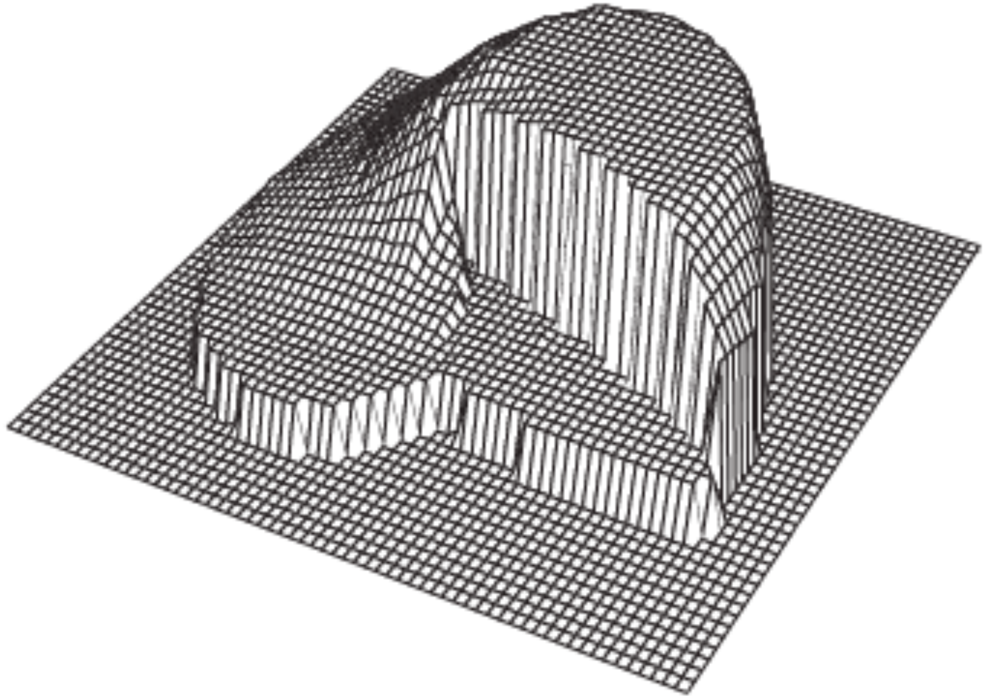


Imagem no universo matemático



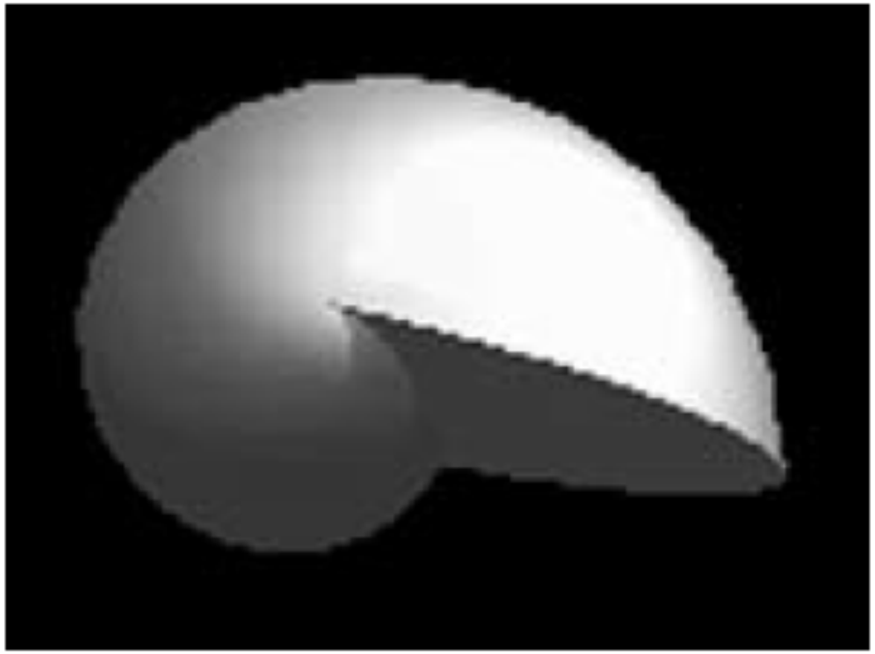


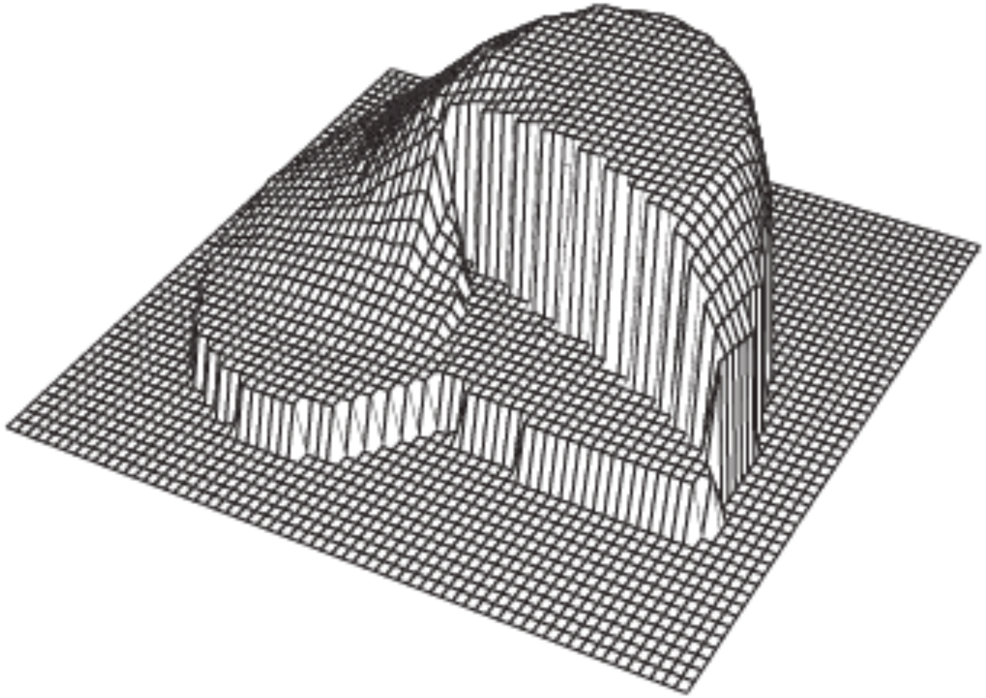
$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto C$$

- f: função imagem
- U: suporte da imagem
- C: espaço de cor. Em geral $C \subset \mathbb{R}^n$
- f(U): conjunto de cores, ou gamute de cores da imagem

Imagem como gráfico de função: $G(f) = \{(x, y, z); (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$

Imagem no universo matemático





$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto C$$

- C: espaço de cor. Em geral $C \subset \mathbb{R}^n$

n = 1: imagem monocromática
n = 3: imagem tricromática (colorida), em geral RGB

Se n = 3, podemos escrever:

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$$

ou seja: imagem colorida é formada por 3 imagens monocromáticas (componentes de cor de f)

Representação de uma imagem

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto C$$

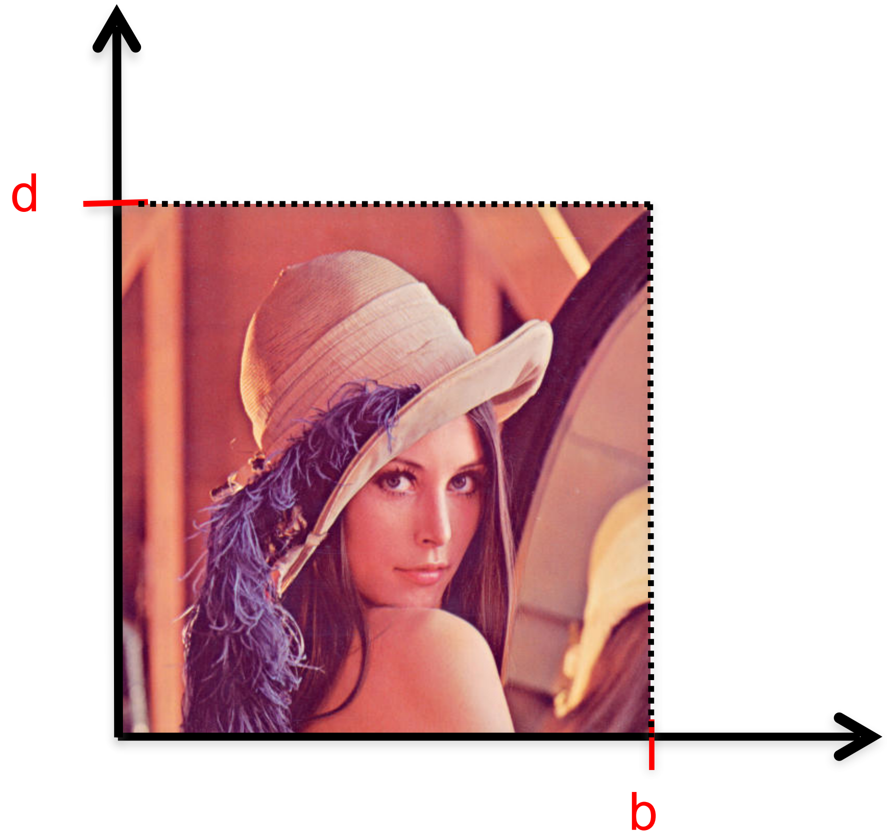
- Representação espacial: representação do suporte U
- Representação de cor: representação do espaço de cor C.

Representação espacial

Amostragem matricial uniforme

Seja $U = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

Vamos considerar sempre a = c = 0



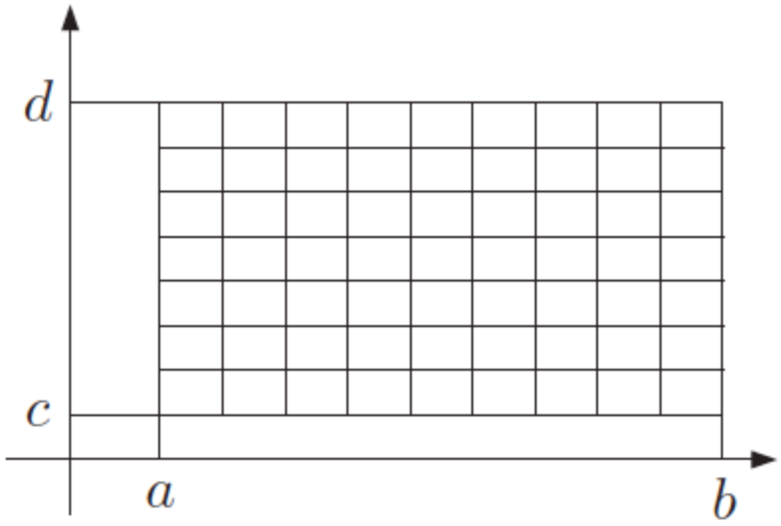
Representação espacial

Reticulado uniforme

$P_\Delta = \{(x_j, y_k) \in \mathbb{R}^2\}$,

$x_j = j \cdot \Delta x, j = 0, 1, \ldots, m-1. \quad \Delta x = b/m$

$y_k = k \cdot \Delta y, k = 0, 1, \ldots, n-1. \quad \Delta y = d/n$



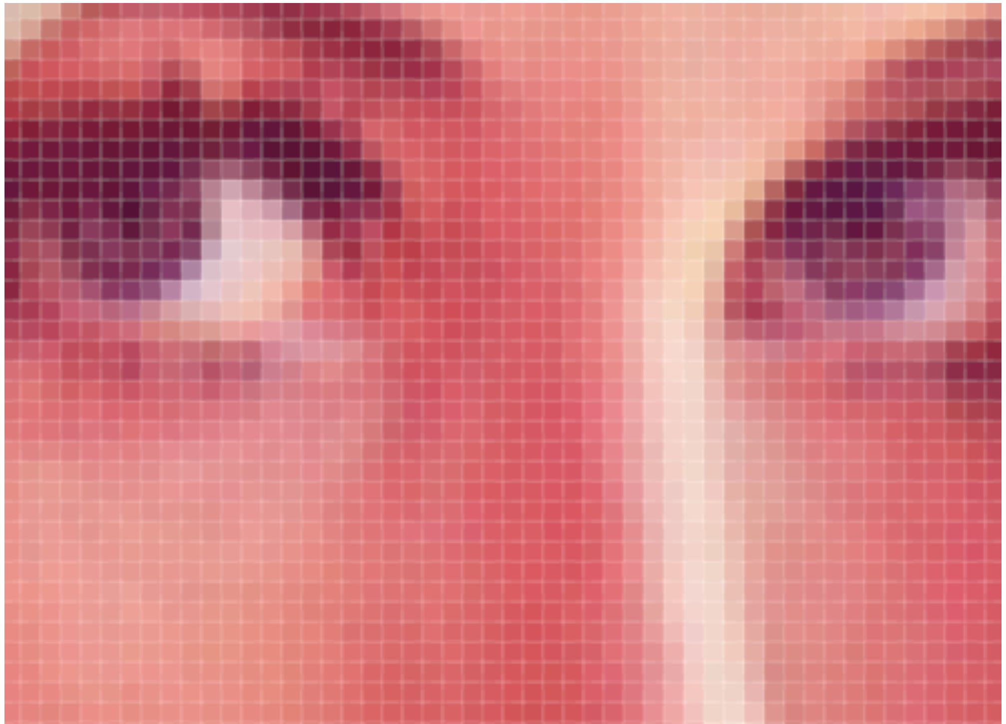
Decomposição do espaço em células:

$$c_{jk} = [j\Delta x, (j+1)\Delta x] \times [k\Delta y, (k+1)\Delta y], \ \ j = 0, \ldots, m-1$$

Cada célula da imagem é chamada de **pixel** (*picture element*).

m é chamada resolução vertical
n é chamada resolução horizontal
m x n é chamada resolução espacial

Para representar a imagem, é necessário obter valores de f_{jk} em cada célula c_{jk}.



Representação na célula

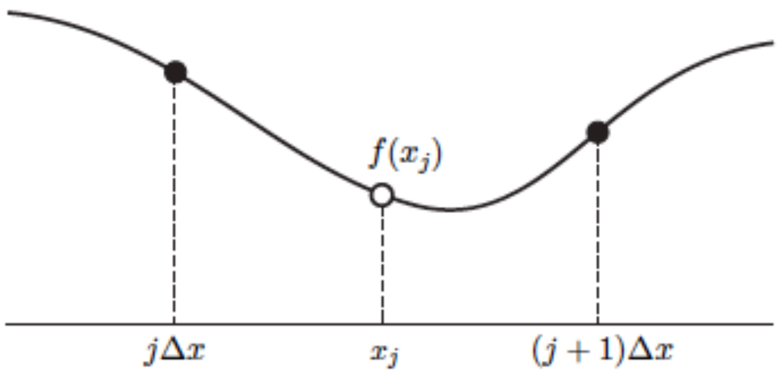
Amostragem pontual

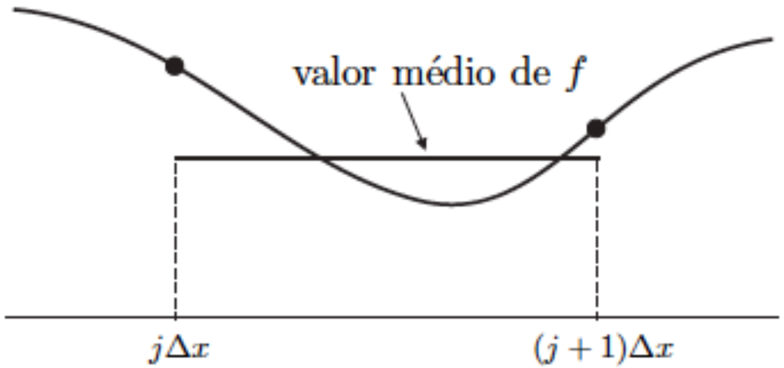
Para cada c_{jk} , escolhemos um ponto (x_j, y_k) e atribuimos $f_{jk} = f(x_j, y_k)$.
Ex.: centro de cada célula (como calcular?)

Amostragem por área

Atribui-se o valor médio de f na célula:

$$f_{jk} = \frac{1}{Area(c_{jk})} \int_{C_{jk}} f(x,y)dxdy$$





Estrutura de dados da imagem

1. Matriz m x n, A = (a_{jk}) guardando os valores $f_{jk,}$ ou amostras.

   Cada elemento a_{jk} é um vetor do espaço de cor:

   Se n = 1, a_{jk} é um número real representando a luminância do pixel
   Se n = 3, a_{jk} é um vetor do $\mathbb{R}^3$ representando uma cor tricromática (RGB).

2. Comprimentos Δx e Δy das células.

Densidade de resolução: número de pixels por unidade de medida

dpi (dots per inch)
ppi (pixels per inch)

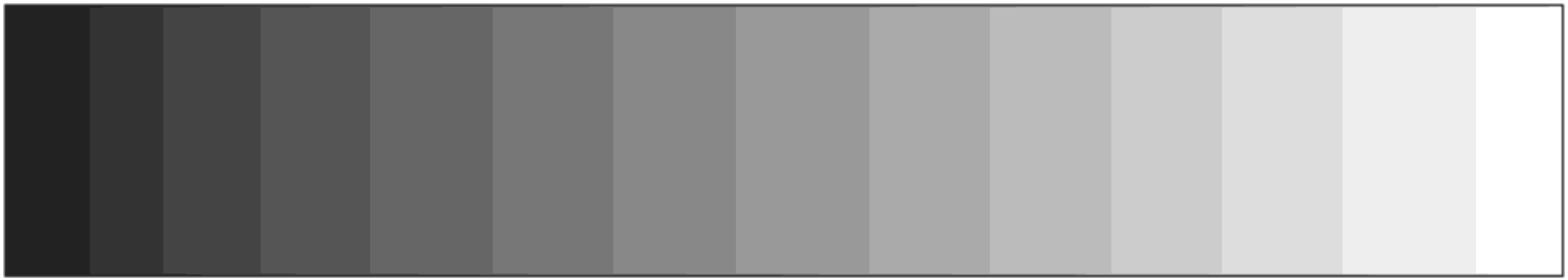
Representação de cor

Como representar os números reais do vetor de cor?

Resolução de cor da imagem: Quantos bits devemos utilizar para representar cor?

Quantização: processo de discretização do espaço de cor de uma imagem, ou seja, do $\mathbb{R}^3$

Quantização de tons de cinza com 256 intensidades (8 bits)



Quantização de tons de cinza com 16 intensidades (4 bits)

Reconstrução de imagens

Problema de interpolação

$$\boxed{\text{Imagem no universo matemático}} \longleftarrow \boxed{\text{Representação de uma imagem}}$$

Núcleo de reconstrução n-dimensional: Função $\phi\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\phi(0) = 1$ e a família de funções $\{\phi(x - p_i); i = 0, \ldots, k-1\}$ é linearmente independente.

Reconstrução de f usando o núcleo ϕ:

$$f_r = \sum_j f_j \phi(x - p_j)$$

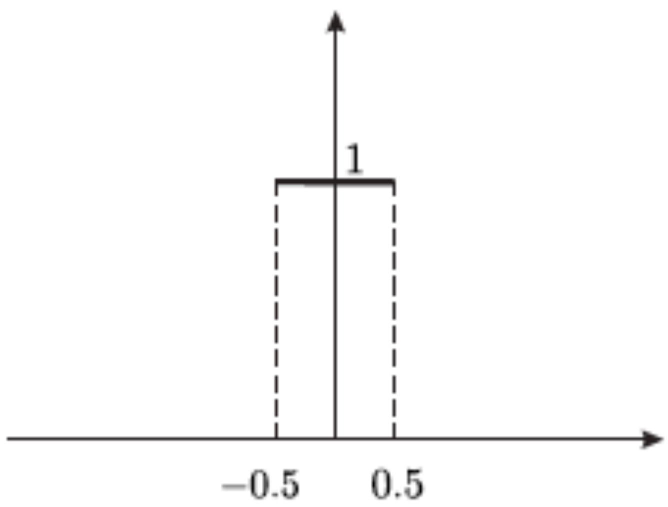
Núcleos de reconstrução unidimensionais

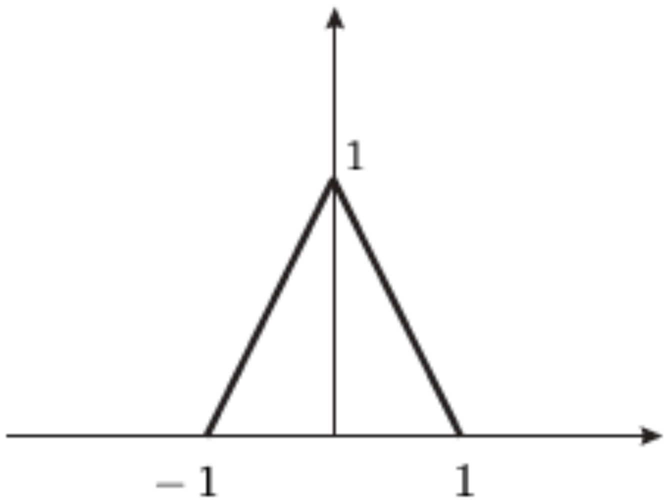
Núcleo constante, ou box, ou Núcleo de Haar:

$$h_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & \text{senão.} \end{cases}$$

Núcleo triangular

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{senão.} \end{cases}$$

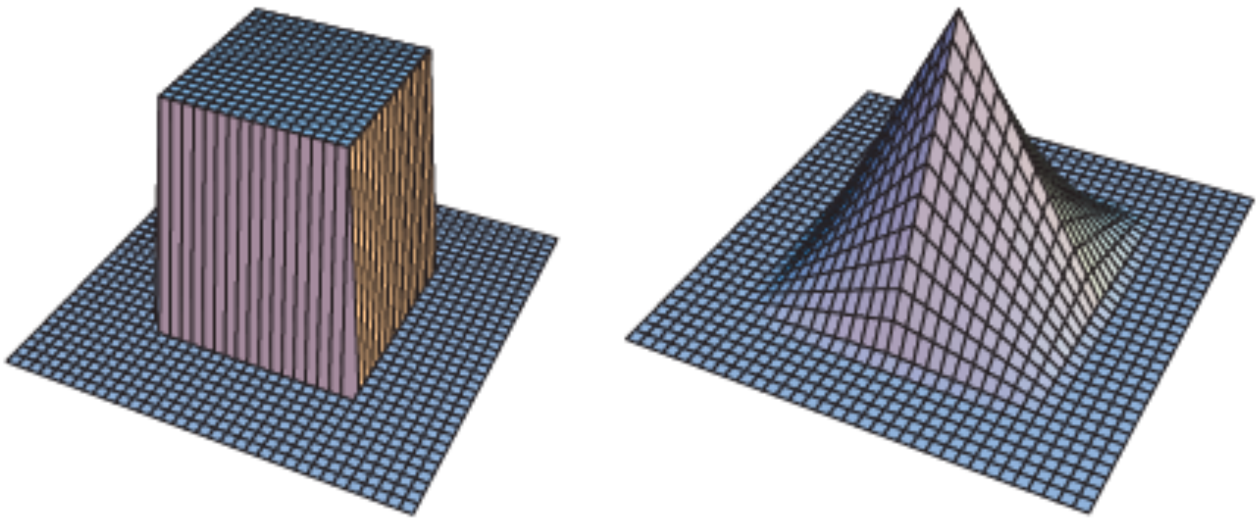




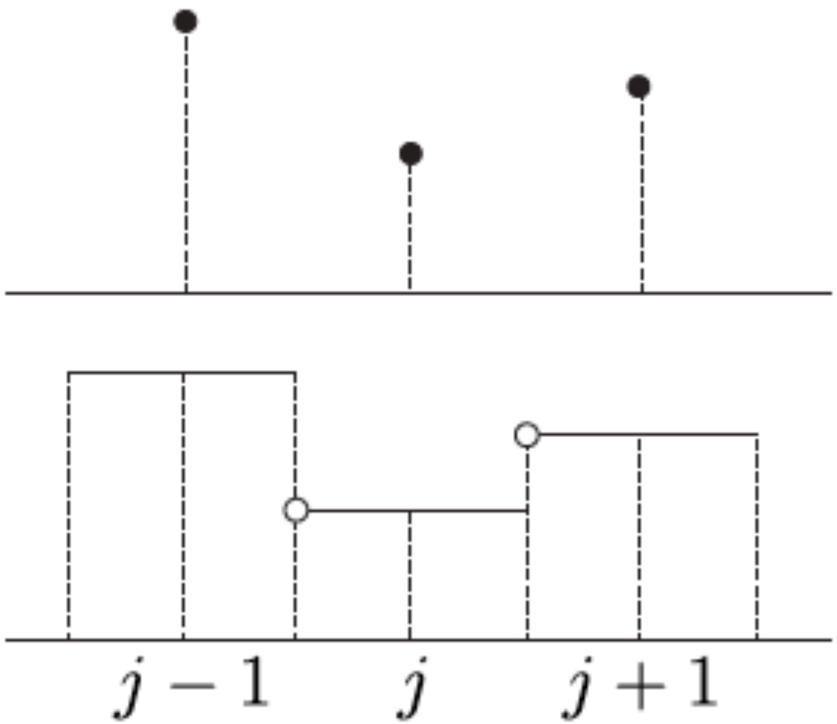
Núcleos de reconstrução bidimensionais

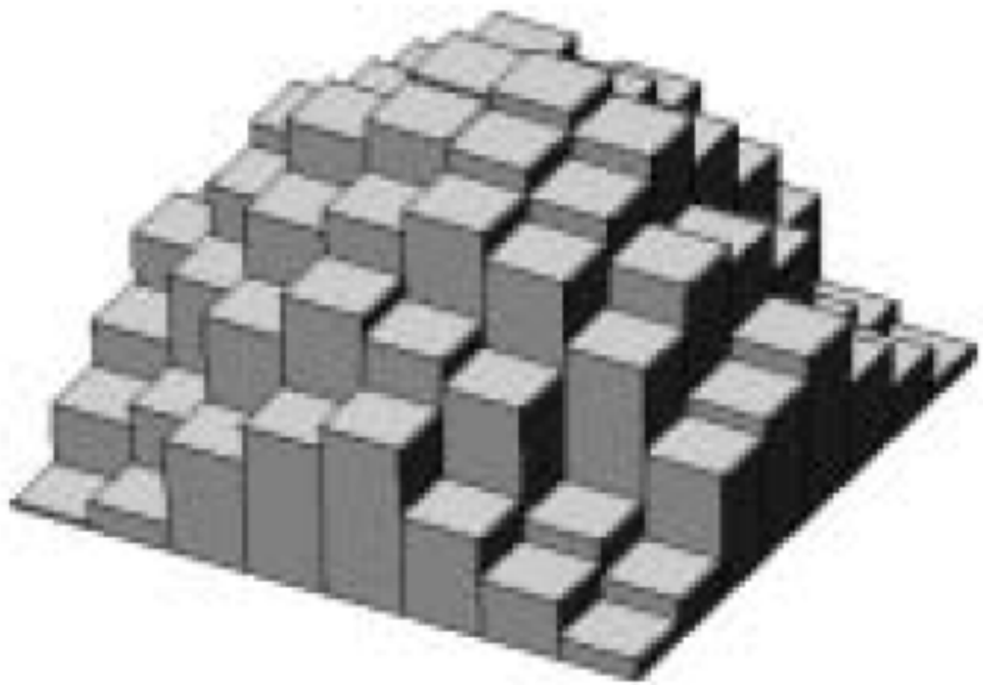
Produto de núcleos unidimensionais:

$$h_i^2(x, y) = h_i(x)h_i(y)$$

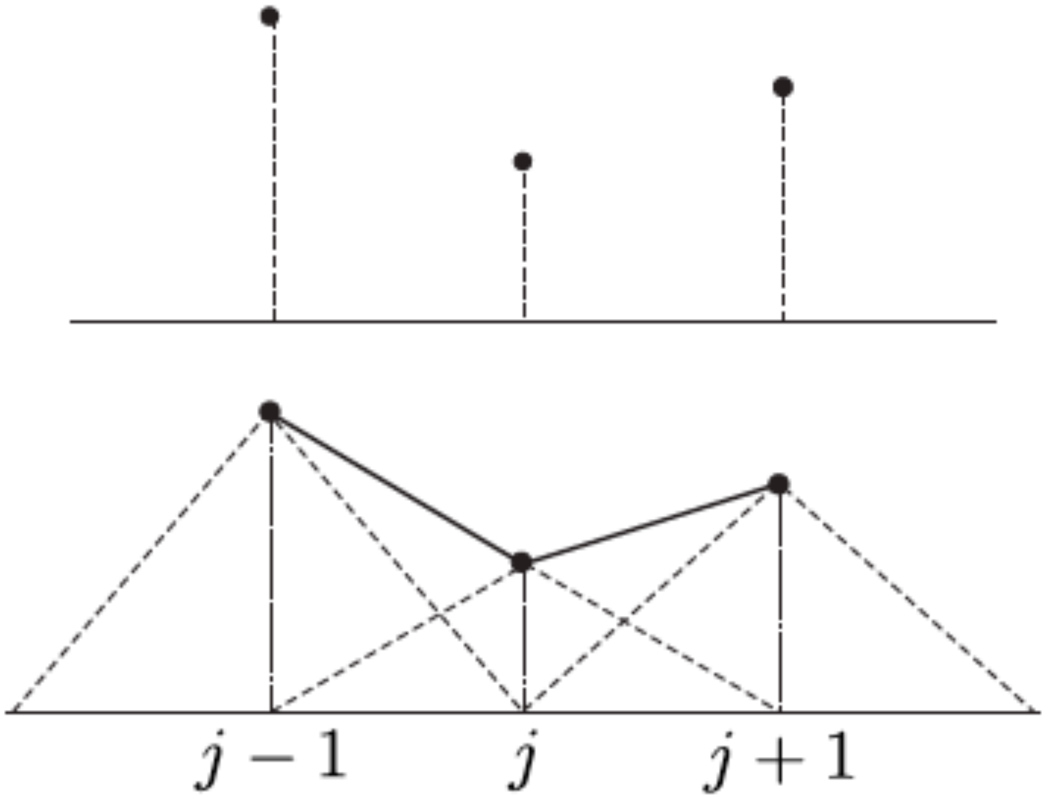


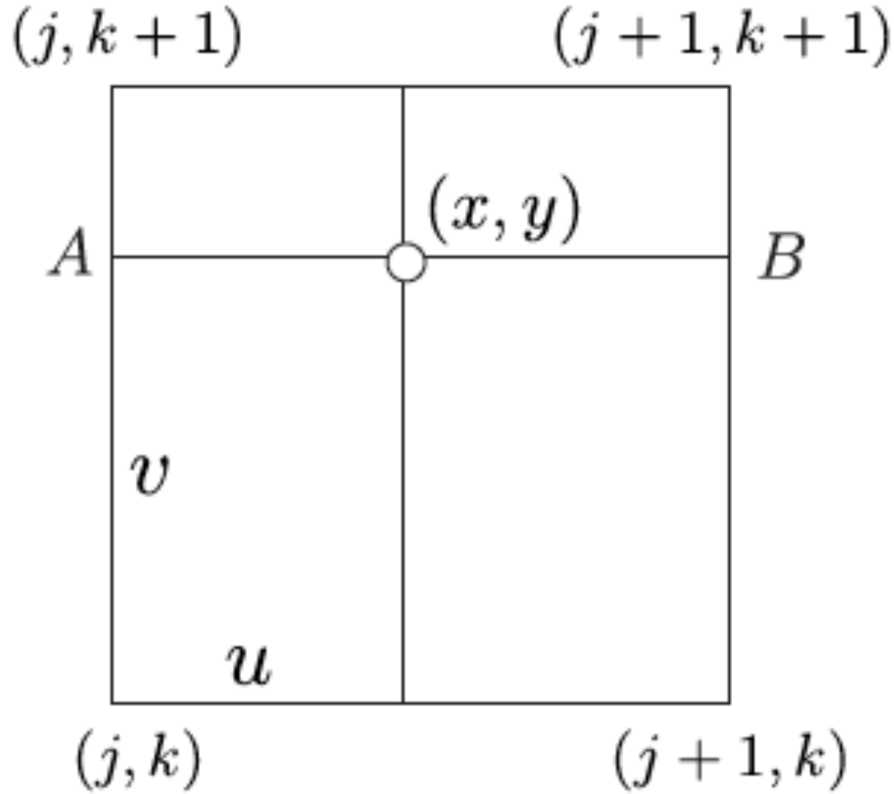
Reconstrução com o núcleo de Haar





Reconstrução com o núcleo triangular





Núcleo constante

Núcleo triangular

Elementos da imagem digital

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto C$$

1. Resolução espacial (número de pixels)
2. Número de componentes de cor (monocromática, tricromática, ...)
3. Resolução de cor (8 bits, 24 bits, 32 bits...)
4. Gamute: f(U)

Representações das imagens digitais

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto C$$

Dizemos que f tem suporte contínuo quando podemos calcular f em qualquer ponto de U. Caso contrário, f tem suporte discreto.

Dizemos que f tem espaço de cor contínuo quando a cor é representada usando ponto flutuante. Também é comum usar um espaço de cor quantizado.

Representações:

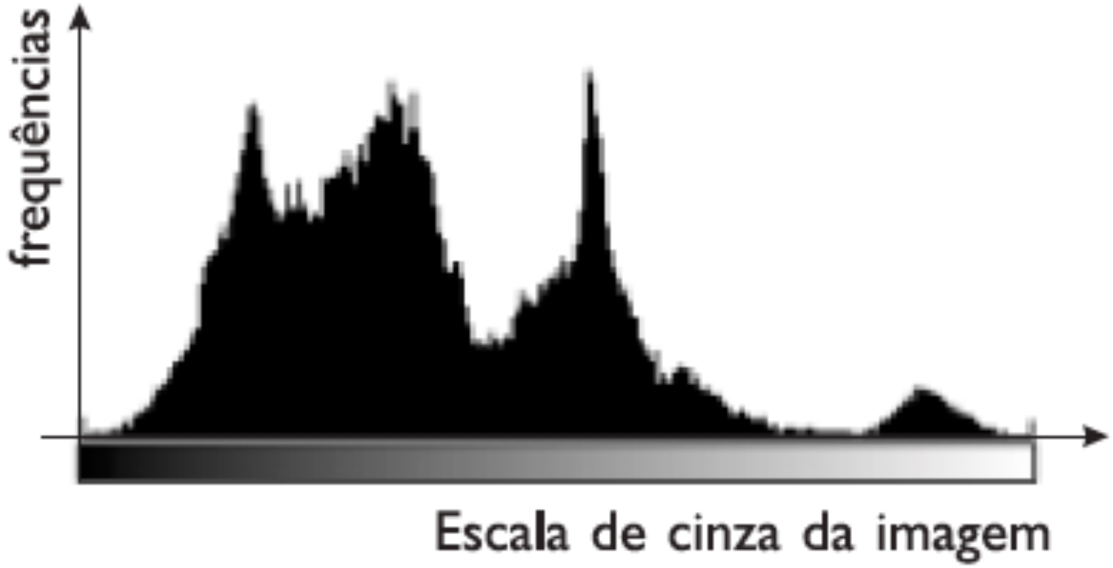
1. contínua-contínua;
2. contínua-quantizada;
3. discreta-contínua;
4. discreta-quantizada: **Imagem digital.**

Histograma de frequência

Modelo estatístico: Considera a imagem como uma variável aleatória definida no reticulado.

Analisa a distribuição de probabilidade associada à ocorrência de cores de cada pixel

Histograma de cor: associa a cada intensidade de cor *c* presente na imagem, a sua frequência de ocorrência (número de pixels com a cor *c*).



Quantização de cor

Processo de discretização de cor

Conjunto contínuo de cores (infinito) → Conjunto discreto de cores (finito)

Por que quantizar?

1. Se adaptar ao espaço de cor do dispositivo gráfico de exibição;
2. Comprimir a imagem para armazenamento e transmissão.

Quantização de cor

Considere o conjunto discreto: $R_k = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{R}^n$

Quantização é representada por uma transformação sobrejetiva: $q\colon \mathbb{R}^n \mapsto R_k$

Quantos bits são necessários para representar um elemento de R_k?

Se $k = 2^m$, são necessários *m* bits.

Cada elemento p_i é chamado **nível de quantização.**

Obs.: q é também aplicada para quantizar conjuntos finitos, ou seja:

$$q\colon R_j \mapsto R_k$$

Se $j = 2^n$ e $k = 2^m$, então q é uma quantização de *n* para *m* bits.

Seja $f : U \mapsto \mathbb{R}^3$ uma imagem tricromática.

Após um processo de quantização, o resultado é a imagem discreta-discreta:

$$f' : U \mapsto R_k, \qquad f'(x, y) = q(f(x, y))$$

Células e níveis de quantização

Seja $q\colon \mathbb{R}^n \mapsto R_k$

Para uma dada cor $p_i \in R_k$, temos um subconjunto

$$C_i = q^{-1}(p_i) = \{c \in C; q(c) = p_i\},$$

onde C é o espaço de cor.

A família de conjuntos C_i particiona o espaço de cor C, ou seja:

$$\bigcup_i C_i = C$$

$$i \neq j \to C_i \cap C_j = \emptyset$$

Cada conjunto C_i é chamado **célula de quantização**.

Se $c \in C_i$, seu erro de quantização é dado por

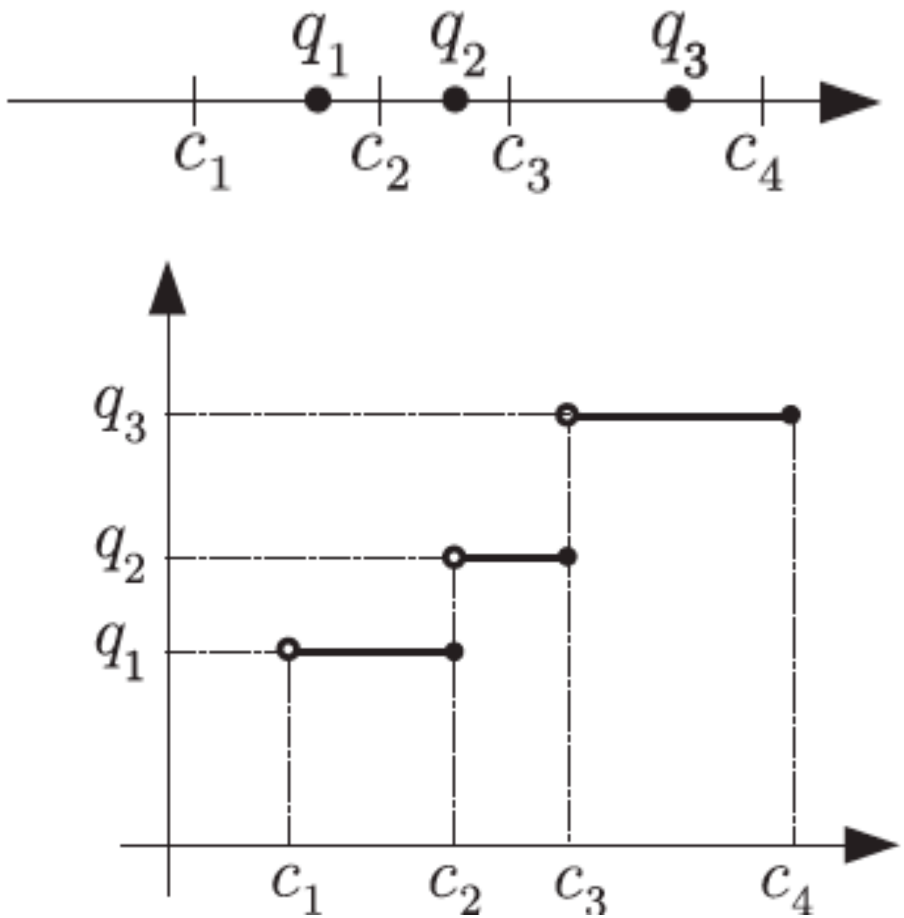
$$e_q = |c - q(c)| = |c - p_i|$$

Quantização unidimensional

Sejam $q_i, 1 \leq i \leq L$ os níveis de quantização de q.

No caso unidimensional, as células de quantização são sempre intervalos

$$c_{i-1} \leq c \leq c_i, \text{ onde } q(c) = q_i, \text{ e } 1 \leq i \leq L.$$



Quantização multidimensional

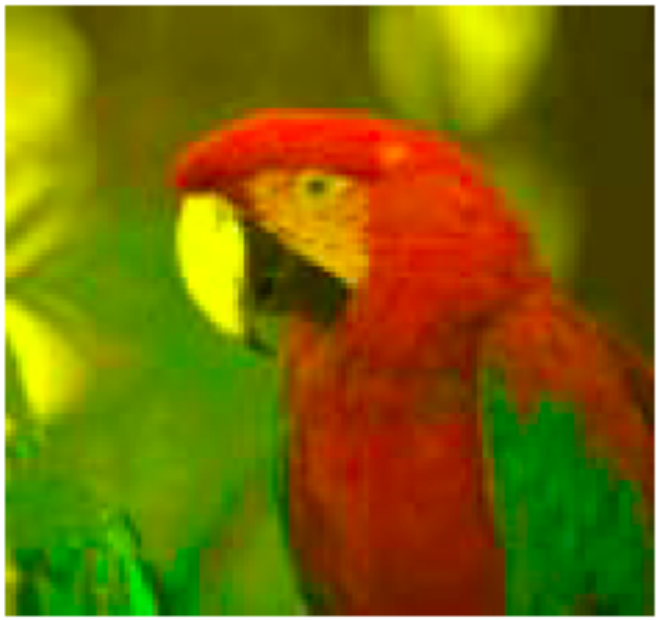
Células de quantização são regiões do espaço de cor, com geometria complexa.

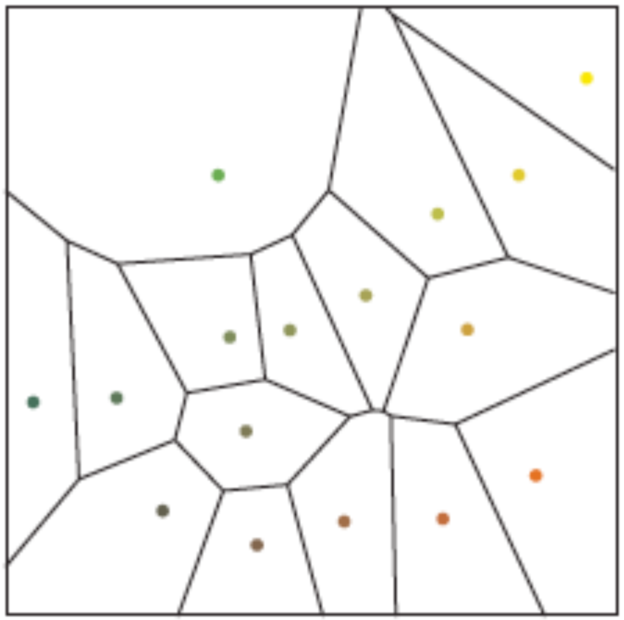
1. **Quantização escalar**

Seja $q \colon \mathbb{R} \mapsto R_k$ uma quantização unidimensional. Definimos uma quantização escalar como

$$\hat{q} \colon \mathbb{R}^n \mapsto R_k \times \cdots \times R_k,$$

onde $\hat{q}(x_1, \ldots, x_n) = (q(x_1), \ldots, q(x_n))$. Quando uma quantização multidimensional não é escalar, ela é vetorial.





Percepção e Quantização

Seja $f : U \mapsto C$ monocromática, onde C é uma quantização em L níveis. Esta quantização determina uma partição do suporte da imagem em subconjuntos U_i, tal que

$$U_i = f^{-1}(q_i) = \{(x, y) \in U; f(x, y) = q_i\}$$

A fronteira entre os subconjuntos U_i é chamada **fronteira de quantização**.

Perceptualmente:

boa quantização ⇔ fronteira de quantização imperceptível

Geometria das células

1. Quantização uniforme

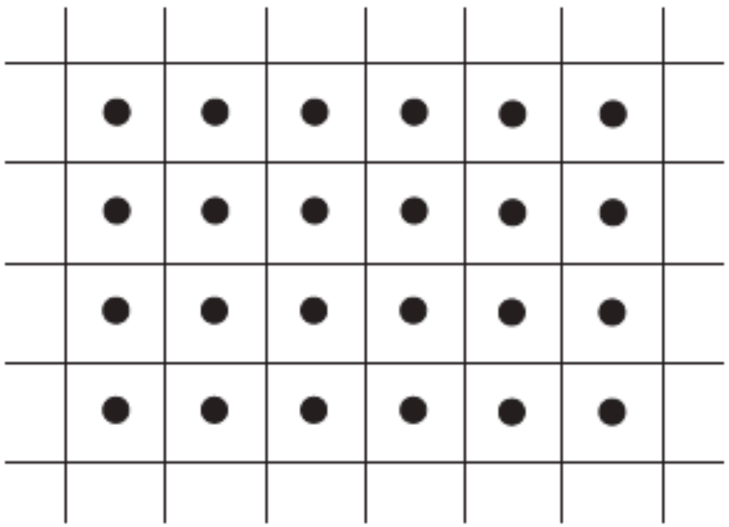
   Divide o espaço de cor em células congruentes (i. e., intervalos de mesmo tamanho)

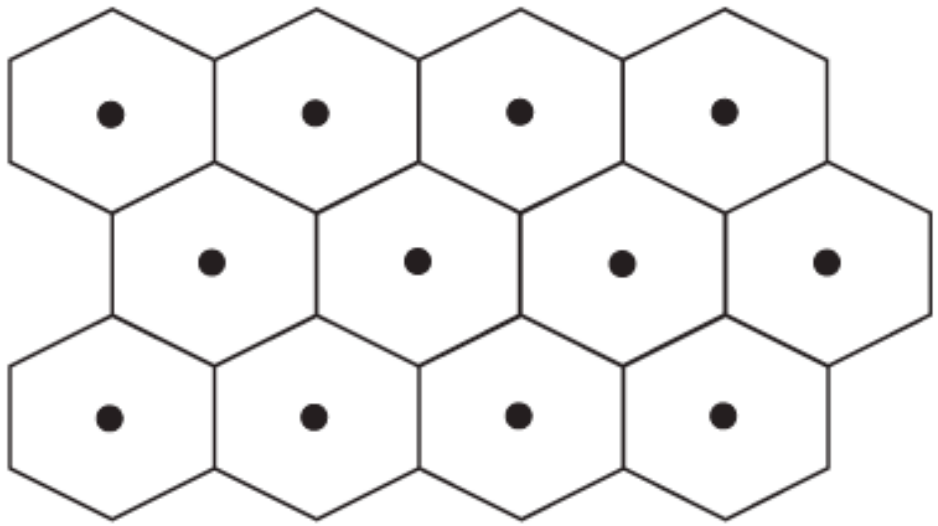
   Toma o centro de cada célula como valor de quantização.

   Exemplo: quantização escalar

   células: intervalos $(c_{i-1}, c_i]$ de mesmo comprimento;

   valor de quantização: $q_i = \dfrac{c_i + c_{i-1}}{2}$



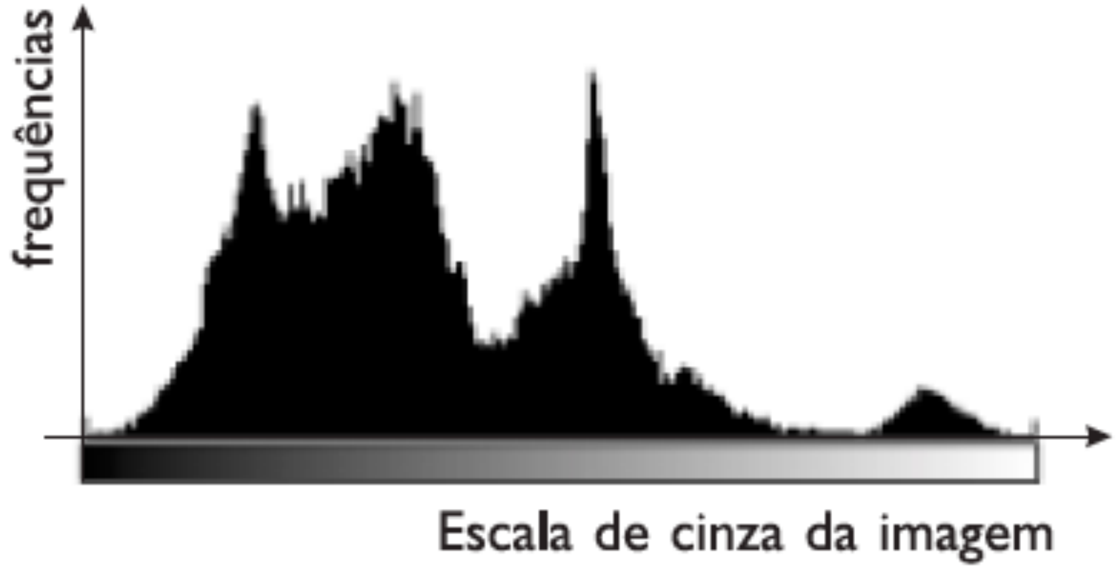


Geometria das células

1. Quantização não-uniforme ou adaptativa

   Objetivo: obter mais células em regiões do espaço de cor mais usadas pelos pixels da imagem, diminuindo a diferença entre a imagem original e quantizada.

   Diretamente relacionada com o histograma de frequência



Classificação dos métodos de quantização

Valores de quantização vs. células de quantização

1. **Métodos de seleção direta:** Determinam-se os valores de quantização $q_1, \ldots, q_k$, e a partir destes calcula-se as células de quantização:

$$c \in C_i \Leftrightarrow q(c) = q_i \Leftrightarrow d(c, q_i) \leq d(c, q_j), 1 \leq j \leq N, j \neq i.$$

2. **Métodos de subdivisão espacial**: Determinam-se as células de quantização C_i, e a partir destas calcula-se os valores de quantização q_i.

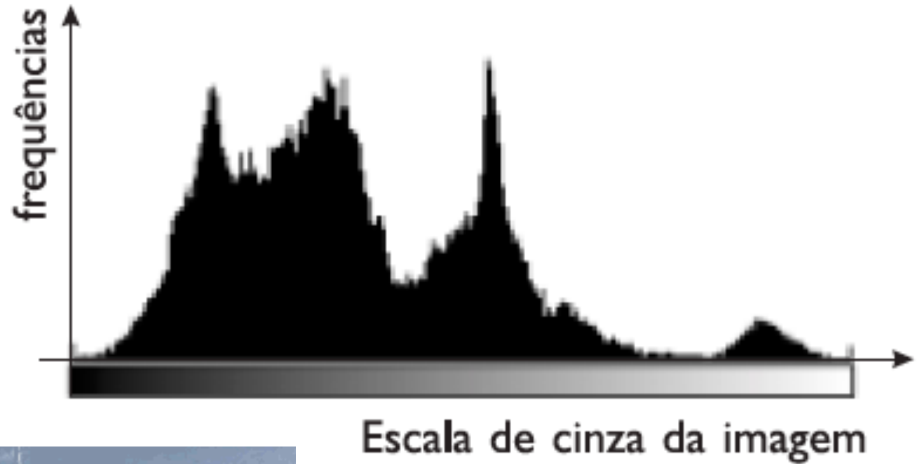
3. **Métodos híbridos**: Determinam-se independentemente valores de quantização e células de quantização.

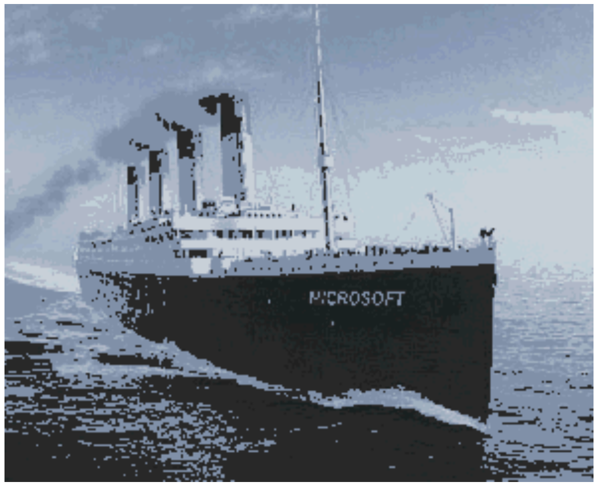
Algoritmo de populosidade

Quantização por seleção direta

Seleciona como valores de quantização as cores mais frequentes do histograma de frequência

Ignora totalmente cores em regiões de baixa densidade do espaço de cor: pode excluir *highlights*.





Algoritmo do corte mediano

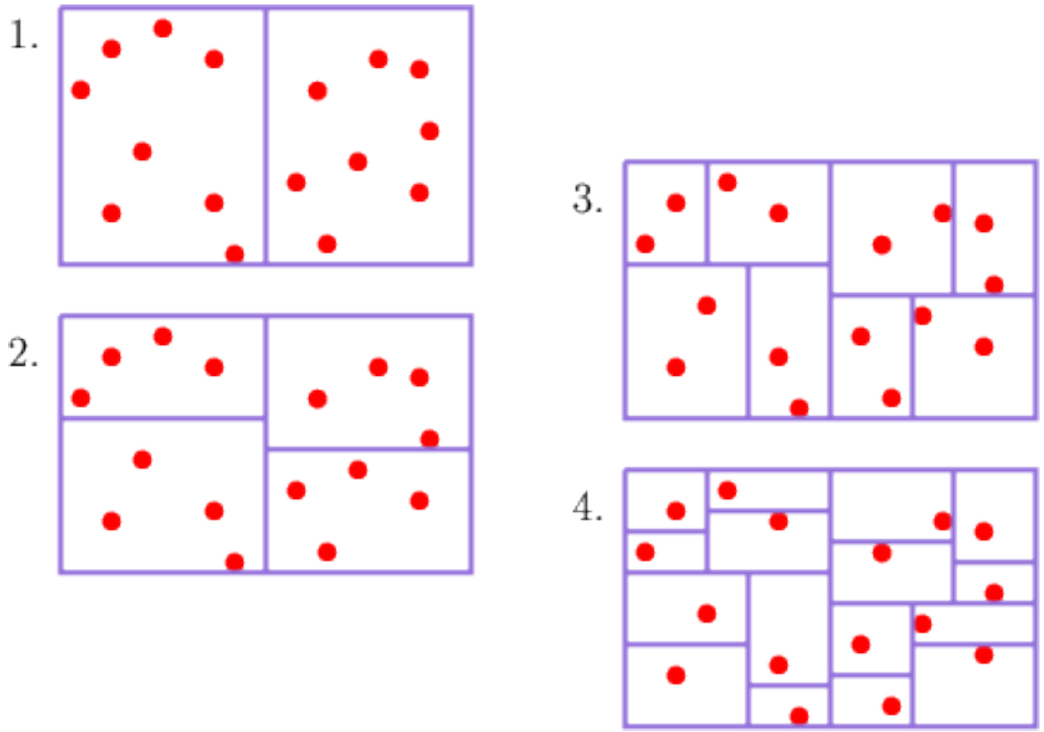
Quantização por subdivisão espacial

Objetivo: gerar uma imagem quantizada com histograma equalizado

Algoritmo:

Seja K o número de níveis de quantização e $V = [r_0, r_1] \times [g_0, g_1] \times [b_0, b_1]$ o volume mínimo contendo o espaço de cor.

1. Corte o lado mais comprido na mediana das coordenadas dos pontos
2. Continue cortando as sub-regiões até obter as K células de quantização.



Dithering

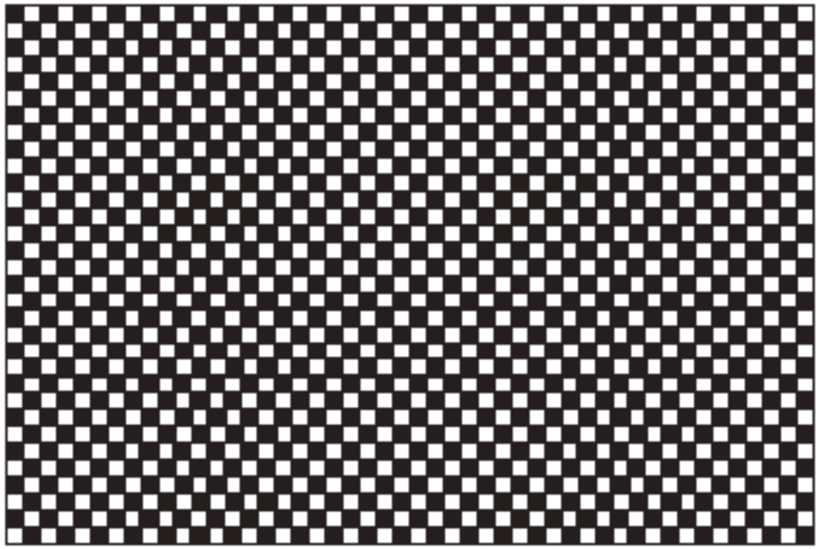
Tipo de quantização em dois níveis

Essencial para exibição de imagens em certos tipos de dispositivos de saída gráfica

Objetivo: exibir imagens monocromáticas mantendo a informação dos tons intermediários quantizando em dois níveis.

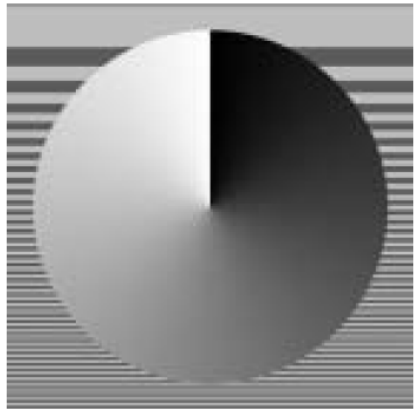
Motivação: o olho integra vizinhanças de luz, percebendo uma intensidade média das regiões.

$$I_m = \frac{1}{|R_k|} \sum_i \sum_j f(i,j)$$



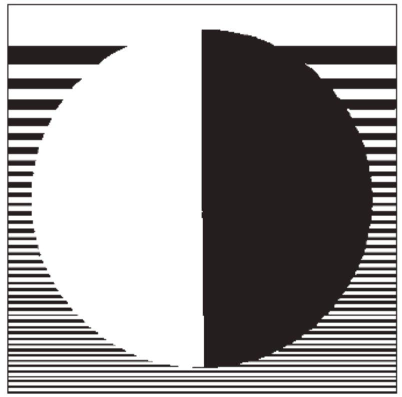
Dithering

Quantização com limiar constante



A partir de um limiar de intensidades L_0, usa-se a regra:

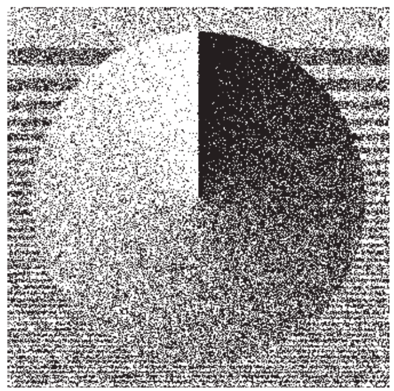
Se $f(x,y) \geq L_0$, quantiza-se para 1
Senão, quantiza-se para 0.



Quantização com limiar aleatório

O limiar varia aleatoriamente (chamaremos de variável aleatória X), e usa-se a regra:

Se $f(x,y) \geq X$, quantiza-se para 1
Senão, quantiza-se para 0.



Codificação de imagens

1. Cabeçalho:

    a) Resolução espacial da imagem (m linhas, n colunas);
    b) Número de componentes do pixel;
    c) Número de bits de quantização por componente;

2. Matriz com os $m \times n$ pixels.

3ª Lista de Exercícios

Capítulo 6

4, 6, 8 (exceto ultima pergunta), 10, 12

http://www.im.ufal.br/professor/thales/icg.html

thalesv@gmail.com