Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Matemática

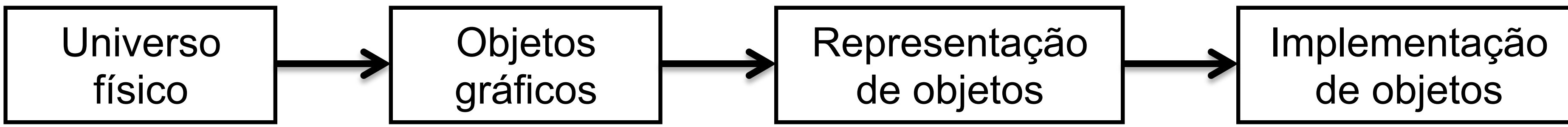
Objetos Gráficos Planares

Prof. Thales Vieira

2011

Objetos Gráficos

"Computação Gráfica é a área que estuda a síntese, o processamento e a análise de objetos gráficos."



Definição: Um objeto gráfico é um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ e uma função $f : S \subset \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$.

S é chamado suporte geométrico;
f é chamada função de atributos;
m é a dimensão do objeto gráfico.

Definição: A área que trata da descrição, especificação e representação do suporte geométrico de objetos gráficos é chamada de **modelagem**.

Objetos Gráficos: Exemplos

Exemplo 1: Subconjuntos do espaço

Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^m$, basta tomar a função de atributos $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, tal que

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in S \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

f é chamada função característica.

Objetos Gráficos: Exemplos

Exemplo 2: Imagem

Uma imagem é definida por uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto C$.

Logo, uma imagem é um objeto gráfico com suporte geométrico U e função de atributos f que fornece a informação de cor em cada ponto do suporte.

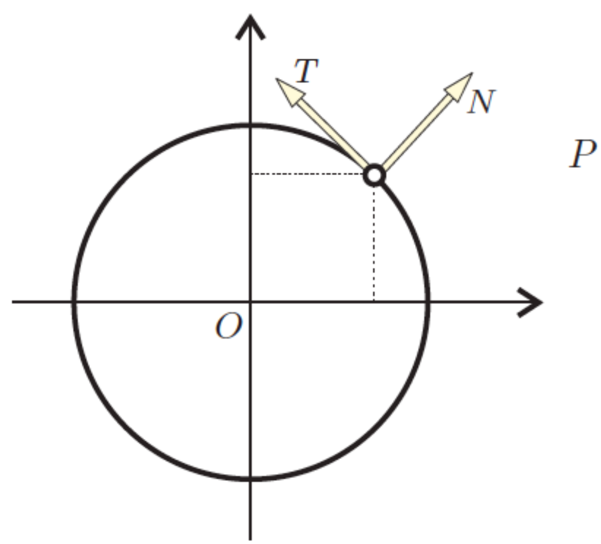
Objetos Gráficos: Exemplos

Exemplo 3: Círculo e campos de vetores

Considere o círculo unitário S^1 de centro na origem, de equação

$$x^2 + y^2 = 1$$

A aplicação $N\colon S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ dada por $N(x,y) = (x,y)$ define um campo de vetores normais unitários a S^1, enquanto a aplicação $T\colon S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) = (y,-x)$ define um campo de vetores tangentes ao círculo. Portanto, o círculo é um objeto gráfico e seus campos de vetores normais e tangentes são atributos do círculo.



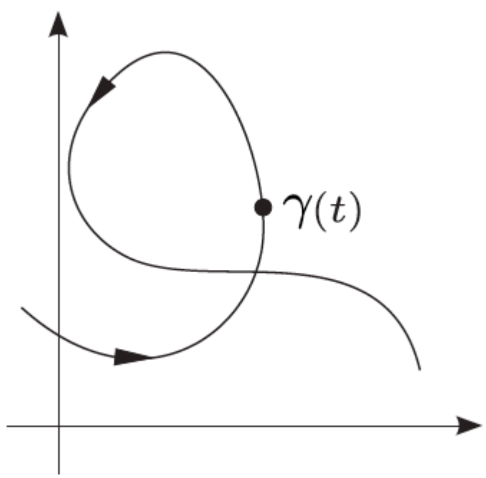
Objetos Gráficos Planares

Considere um objeto gráfico $f : S \subset \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$.

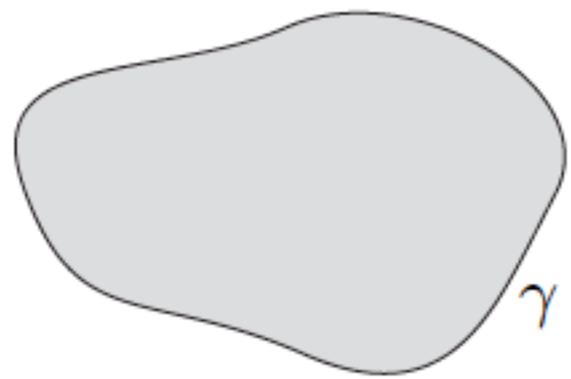
Quando m = 2, temos os objetos gráficos planares.

Quando m ≥ 3, temos os objetos gráficos espaciais.

A dimensão do suporte S é chamada de dimensão dos objetos gráficos planares, e como subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, só podem ser unidimensionais (curvas planas) ou bidimensionais (regiões do plano).



Curva plana



Região do plano

Curvas planas

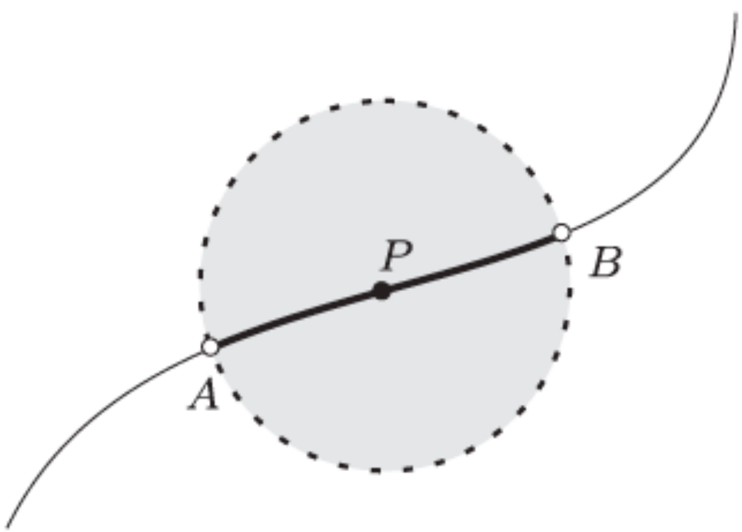
Objetos gráficos planares de dimensão 1

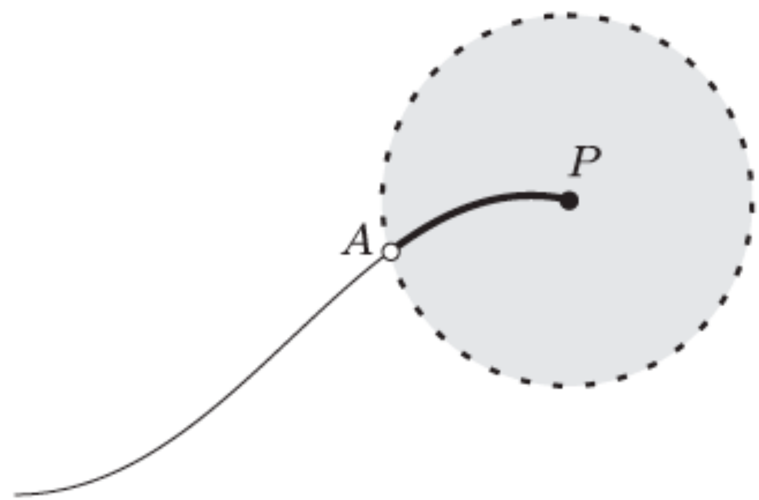
Um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ é uma curva plana se c possui localmente a topologia de um intervalo aberto (0, 1) ou de um intervalo semi-aberto (0, 1].

Para todo ponto $p \in C$, existe um disco aberto

$$D^2(\epsilon, p) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \|x - p\| < \epsilon\right\}$$

tal que $D^2 \cap C$ tem a topologia do intervalo (0, 1) ou (0, 1] (são homeomorfos).



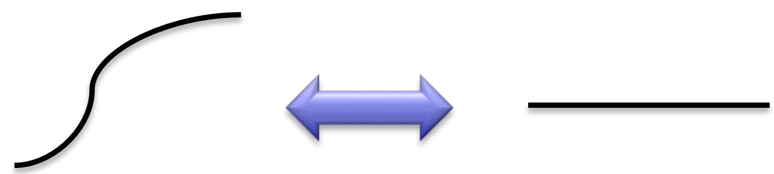


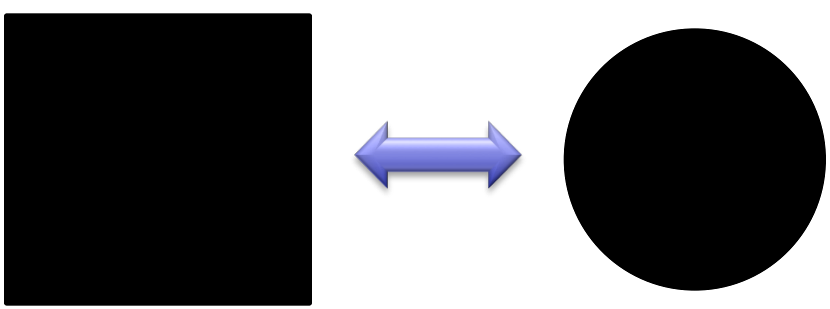
Homeomofismos

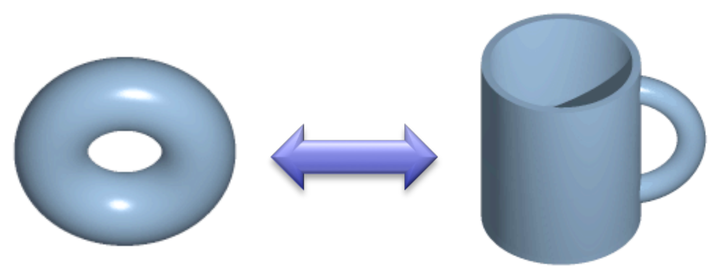
Dois espaços topológicos dizem-se homeomorfos se existir uma aplicação entre esses espaços que seja contínua, invertível e a sua inversa seja contínua.

Exemplos:

- No plano, um quadrado e uma circunferência são homeomorfos.
- Quaisquer duas curvas simples no espaço são homeomorfas.
- Uma caneca e um donut são homeomorfos.

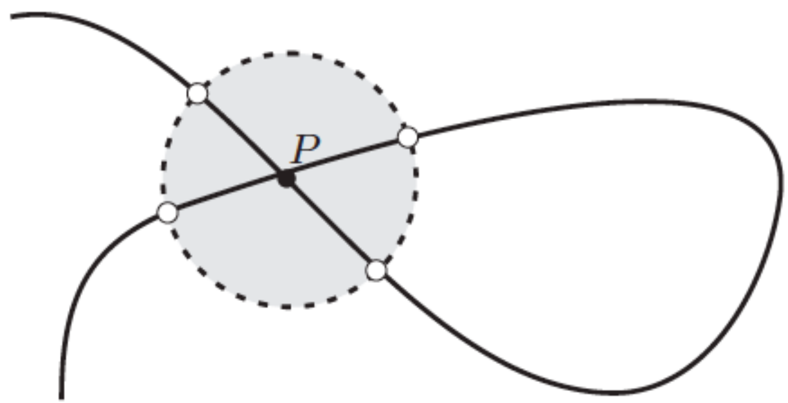






Curvas planas

Uma curva plana não admite auto-intersecções:



Uma curva plana é dita fechada se tem a topologia de um círculo.

Como descrever uma curva plana?

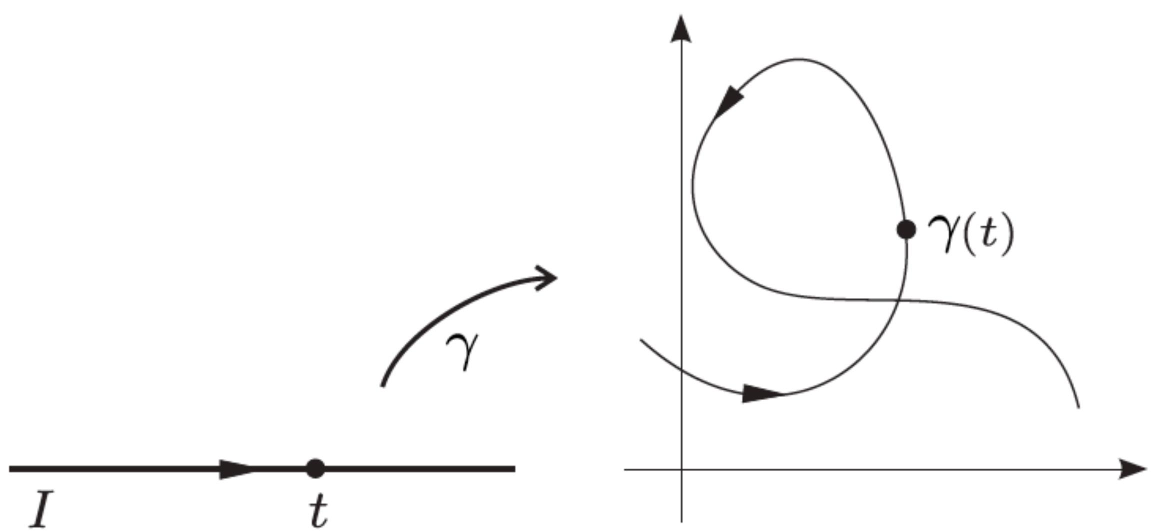
1. Especificação paramétrica
2. Especificação implícita

Curvas planas: Descrição paramétrica

Definida por uma função $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$,
onde I é um intervalo da reta e a imagem $\gamma(I)$ é chamada de traço da curva.

Considerando t como tempo, podemos ver a descrição paramétrica de uma curva plana como a trajetória de uma partícula.

Obs.:
1. Nem sempre o traço de uma curva está livre de auto-interseções.
2. Uma curva pode admitir uma infinidade de parametrizações distintas.



Descrição paramétrica: Exemplos

Equação paramétrica da reta

Dado um ponto p de uma reta e seu vetor diretor v, temos a descrição paramétrica:

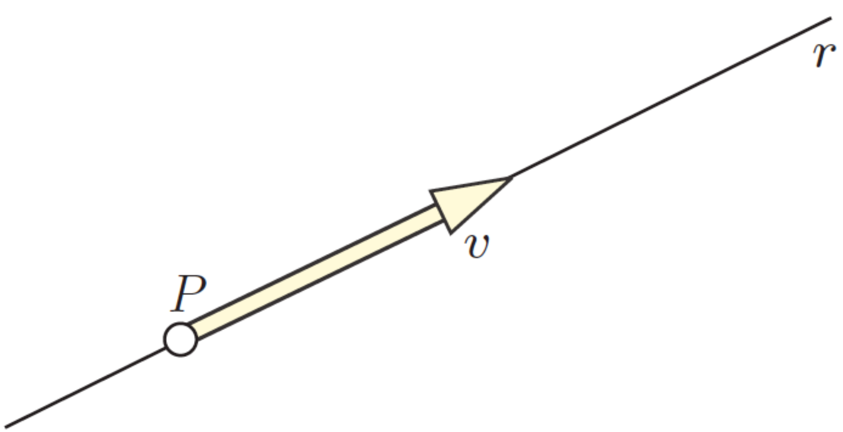
$$\gamma(t) = p + tv, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Se $p = (x_0, y_0), v = (v_1, v_2)$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ então:

$$(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2)$$ e

$$x(t) = x_0 + tv_1$$

$$y(t) = y_0 + tv_2$$



Descrição paramétrica: Exemplos

Gráfico de uma função

Dada uma função $f : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, seu gráfico é uma curva plana definida pelo conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in I\}$$

Esta curva tem descrição paramétrica:

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

Descrição paramétrica: Exemplos

Círculo

A parametrização do círculo é muito usada na Computação Gráfica.

O círculo de raio unitário centrado na origem tem parametrização:

$$\gamma(t) = (cos(t), sen(t)), \qquad t \in [0, 2\pi)$$

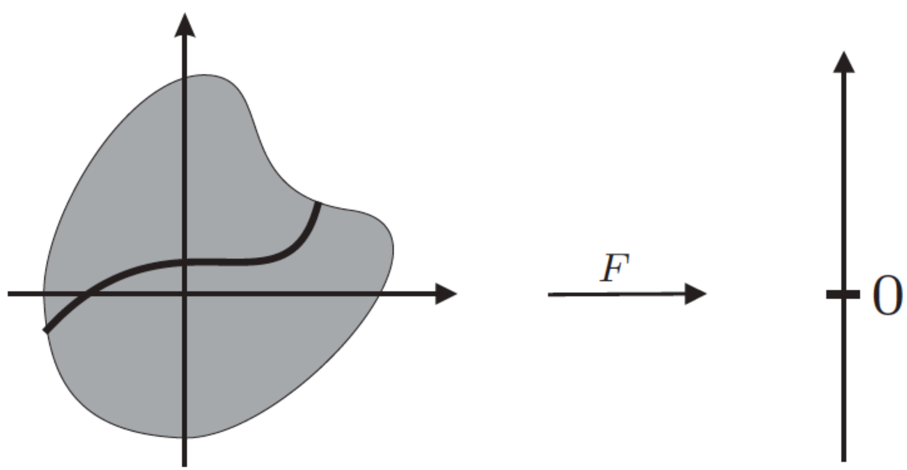
Descrição implícita

Define uma curva plana como o conjunto das raízes de uma equação nas variáveis x e y, ou seja:

Dada $F : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, o suporte geométrico da curva é definido como o conjunto das raízes da equação F(x, y) = 0. Este conjunto é chamado **imagem inversa do 0 pela função F**, ou $F^{-1}(0)$.

$$F^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$$

Se F é um polinômio de grau g, dizemos que a curva é algébrica de grau g.



Descrição implícita: Exemplos

Equação implícita da reta

$$ax + by + c = 0, \qquad ab \neq 0$$

A reta é uma curva algébrica de grau 1

Equação implícita do círculo unitário centrado na origem

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

Em geral, cônicas (círculo, elipse, parábola e hipérbole) representam as curvas algébricas de grau 2:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

onde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Descrição implícita: Observações

Nem sempre F(x, y) = 0 define uma curva sem auto-intersecções.
Exemplo: $F(x, y) = x^2-y^2$.

Condição para não haver auto-intersecções (curva topológica):

Para todo ponto (x_0, y_0), devemos ter

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$$

ou

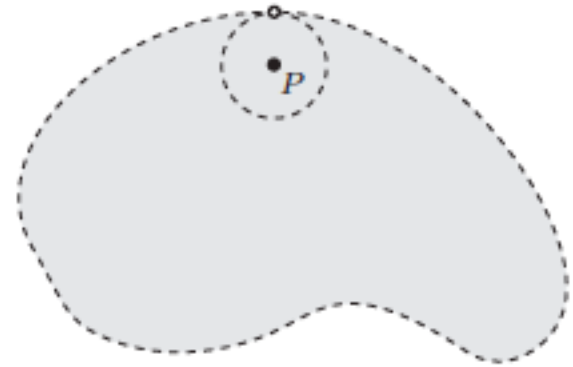
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Ou seja, o vetor gradiente não pode se anular.

$$grad(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) \neq 0$$

Diremos que 0 é um valor regular de F.

Regiões Planares



Objetos gráficos planares de dimensão 2

Regiões abertas

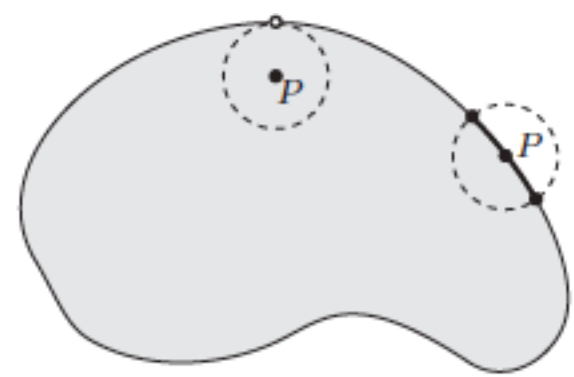
Um subconjunto S do plano é uma região aberta se para todo ponto $p \in S$ existe um disco aberto $D^2(\epsilon, p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \|x - p\| < \epsilon\}$ tal que $D^2(\epsilon, p) \subset S$.

Regiões com bordo

Uma região é dita com bordo se para todo ponto $p \in S$ uma das condições é satisfeita:

1. Existe um disco aberto $D^2(\epsilon, p)$ tal que $D^2(\epsilon, p) \subset S$;
2. $D^2(\epsilon, p) \cap S$ tem a topologia do semi-disco

$$D^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < \epsilon \text{ e } y \geq 0\}$$

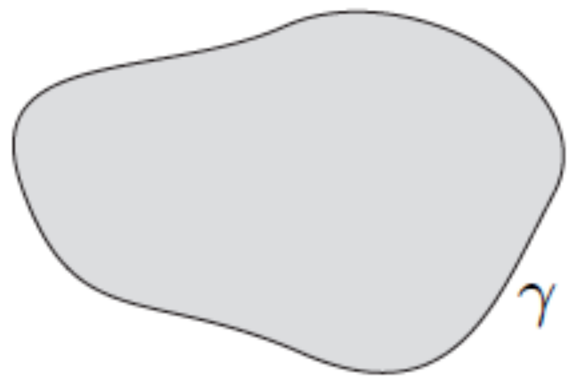


Os pontos que satisfazem a segunda condição são chamados pontos de bordo ou pontos de fronteira.

Teorema de curva de Jordan

Uma curva topológica fechada γ divide o plano em duas regiões abertas, sendo uma limitada e outra ilimitada. A fronteira destas regiões é a curva γ.

Estas curvas são chamadas **curvas de Jordan**.



Especificaçao de regiões

1. Especificar curva de fronteira
2. Determinar um algoritmo para resolver o problema de classificação ponto-conjunto.

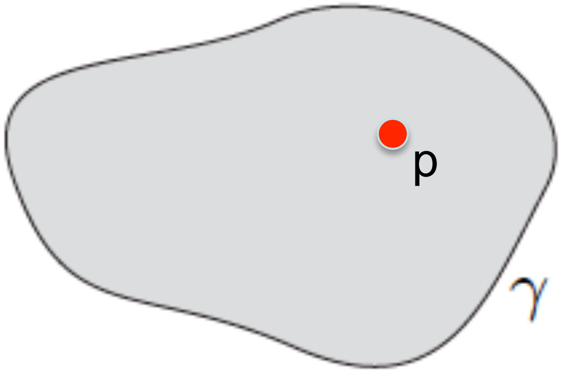
Classificação ponto-conjunto

Um determinado ponto p do plano pertence à regiao interna ou externa da curva?

Solução: Se a curva é definida por uma equação implícita $F(x, y) = 0$, então:

Se $F(x, y) = 0$, (x,y) está sobre a fronteira da região;
Se $F(x, y) > 0$, (x,y) está na região exterior à curva;
Se $F(x, y) < 0$, (x,y) está na região interior à curva.

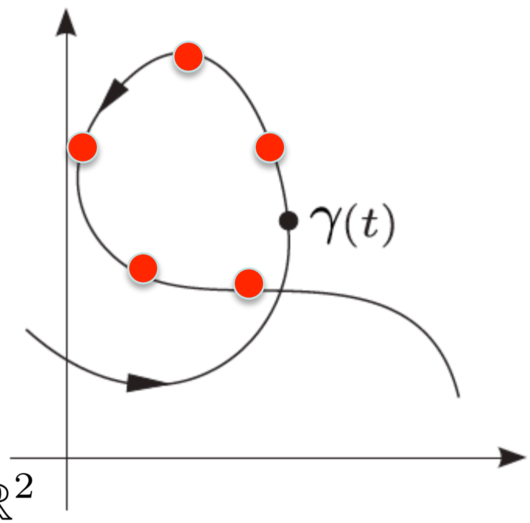
Logo, uma região pode ser representada por uma inequação implícita do tipo: $F(x,y) > 0$, $F(x,y) < 0$, $F(x,y) \leq 0$, $F(x,y) \geq 0$.



Implícito ou paramétrico?

Depende do problema!

Problema 1: Amostragem pontual



Dado um objeto gráfico com suporte geométrico S, determinar um conjunto de pontos p_1, p_2,…,p_n tais que $p_i \in S$

1. Usando representação paramétrica: $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$

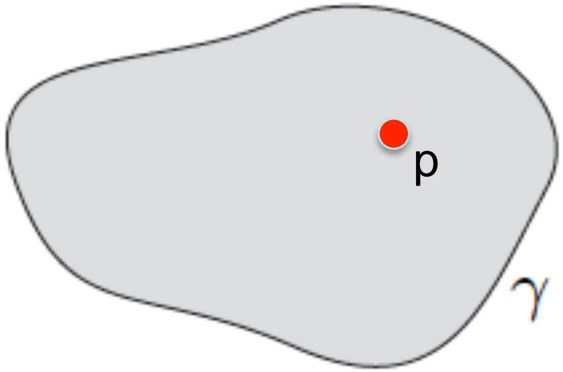
Basta tomar pontos t_1, t_2,…, t_n do intervalo I e calcular $\gamma(t_i)$

2. Usando representação implícita: F(x, y) = 0.

É necessário achar raízes da equação F(x, y) = 0, o que pode ser difícil.

Implícito ou paramétrico?

Problema 2: Classificação ponto-conjunto



Determinar se um ponto p do plano pertence a um objeto gráfico.

1. Usando representação implícita: F(x, y) = 0.

Basta verificar se F(x, y) = 0.

2. Usando representação paramétrica: $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$

É necessário verificar se a equação $\gamma(t) = p$ possui soluções, ou seja, é necessário verificar se o sistema abaixo possui solução:

$$x(t) = p_1$$
$$y(t) = p_2$$

Resolver este sistema pode ser muito difícil!

Curvas Poligonais

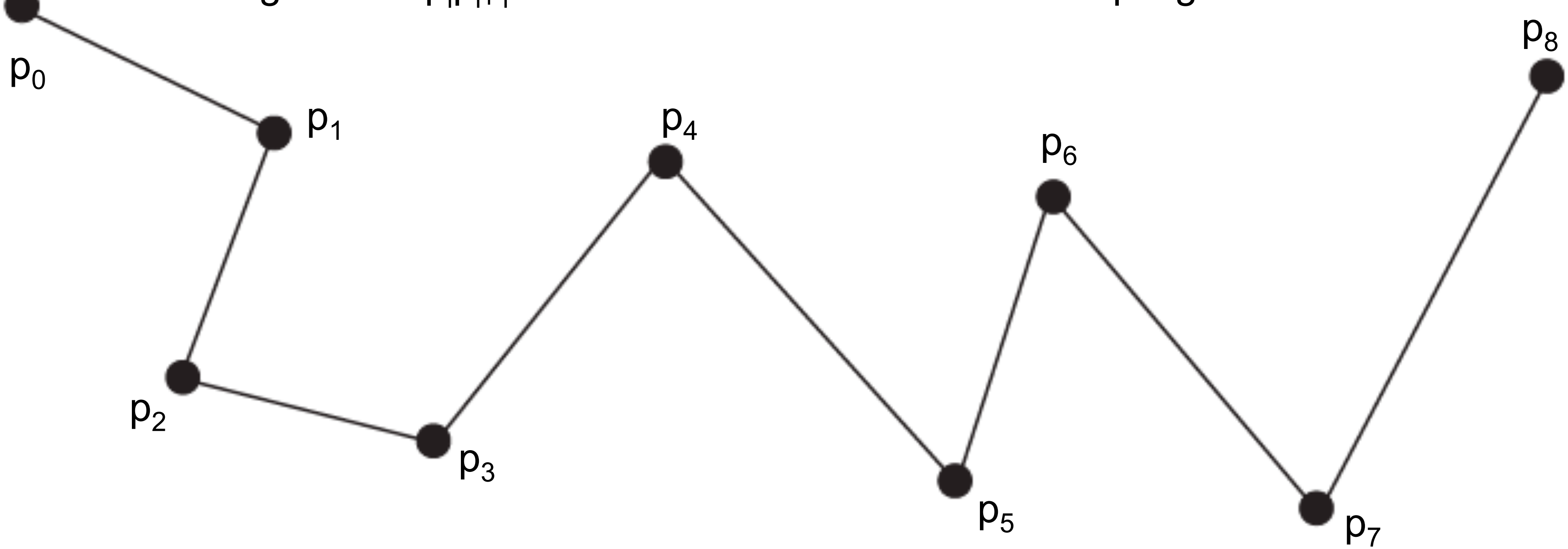
Objetos gráficos → Representação de objetos

Sejam $p_0, p_1, \ldots, p_n$ pontos distintos do plano.

Uma **curva poligonal** é definida como a união dos segmentos p_0p_1, p_1p_2, $p_2p_3, \ldots, p_{n-1}p_n$.

Os pontos pi são chamados **vértices** da curva.

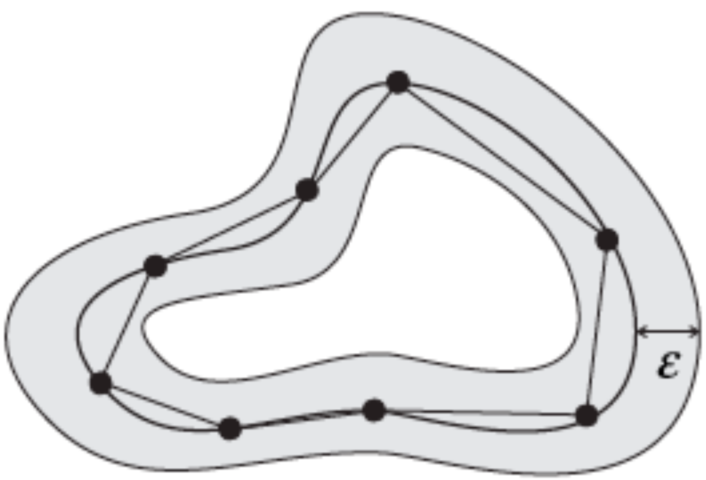
Os segmentos p_ip_{i+1} são chamados **arestas** da curva poligonal.



Curvas Poligonais

- Fáceis de serem representadas e especificadas
- Podem aproximar curvas planas

Regiões poligonais: Regiões delimitadas por uma curva poligonal fechada.



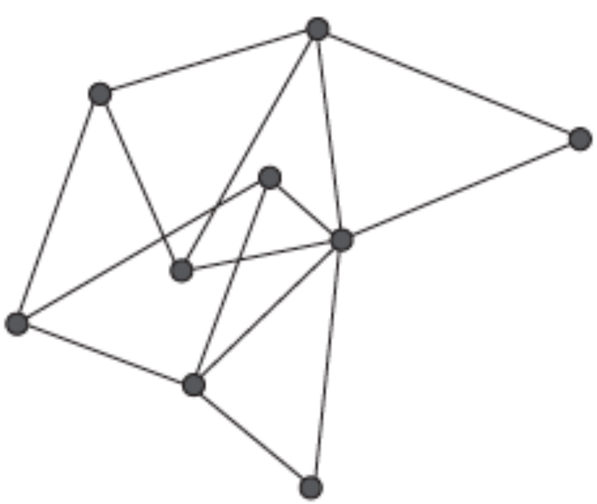
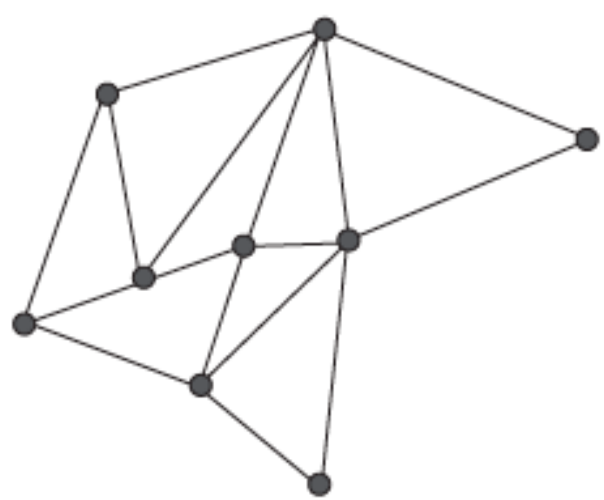
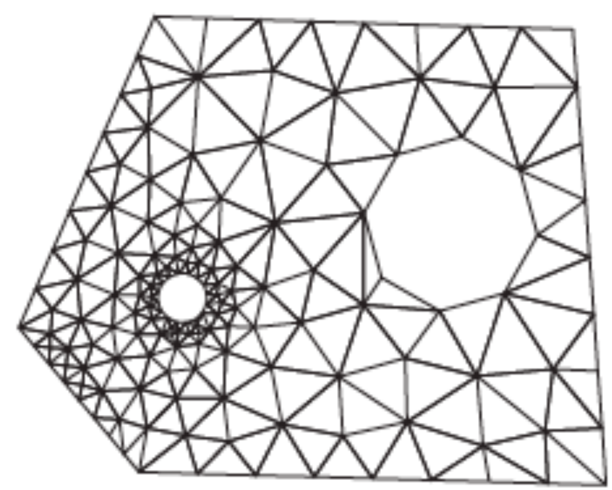
Triangulação

Coleção $\mathcal{T} = \{T_i\}$ de triângulos de modo que dados dois triângulos distintos T_i, T_j de $\mathcal{T}$, uma das três situações abaixo deve ocorrer:

1. $T_i \cap T_j = \emptyset$;

2. $T_i \cap T_j$ é um vértice comum;

3. $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum.

Triangulação

Por que triangular uma região do plano?

Cada triângulo define um sistema de coordenadas local em uma região triangular do plano: coordenadas baricêntricas.

Aplicação: Interpolação de atributos definidos nos vértices da triangulação. (Problema de Reconstrução)

Universo matemático ← Universo discreto

Interpolação usando coordenadas baricêntricas no triângulo:

$$\text{Se } x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3\,;$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1\,;$$
$$\alpha_i \geq 0\,.$$

$$\text{Então } f(x) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(x_3)\,.$$

Representação de objetos gráficos

Estratégia: Dividir para conquistar

Divide-se o suporte geométrico do objeto gráfico, ou o espaço onde ele está mergulhado, até obter representações simples em cada elemento de subdivisão.

Métodos de representação:

1. Representação por decomposição intrínseca

2. Representação por decomposição espacial

Obs.: os atributos do objeto gráfico devem ser representados diretamente na representação do suporte geométrico.

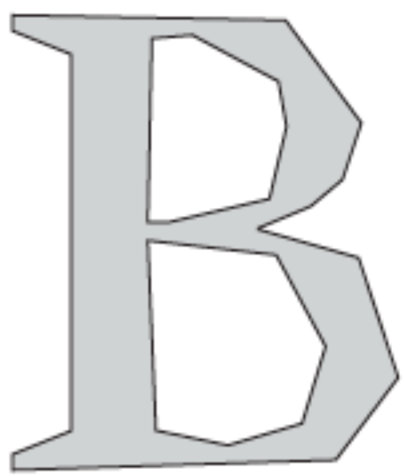
$$f : S \subset \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$$

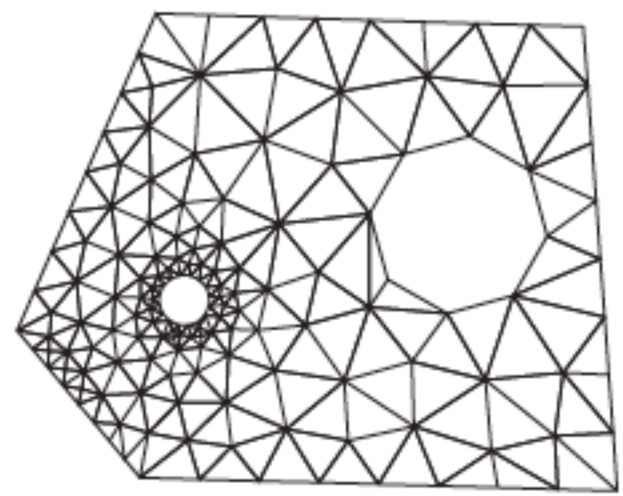
Representação linear por partes: Objetos Vetoriais

Poligonização de regiões: Obter uma representação da região decompondo-a em polígonos.

Exemplos:

1. Poligonização do bordo (por curvas poligonais)
2. Triangulação da região: decomposição da região numa família de triângulos.





Poligonização de Curvas Paramétricas

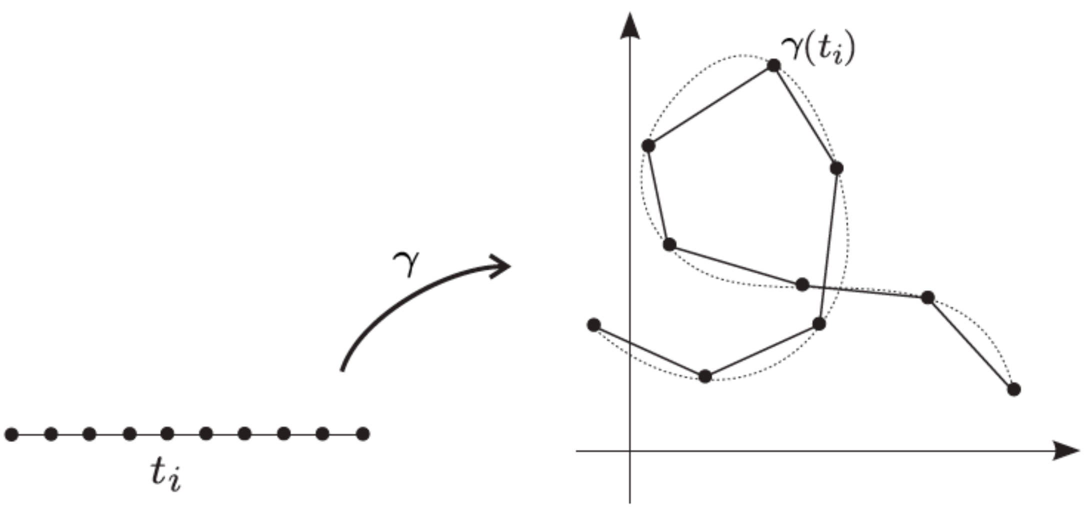
Seja a curva γ definida no intervalo I = [a, b].

1. Amostragem: obter uma partição do intervalo I

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

2. Avaliar a curva γ nos pontos t_i, obtendo uma sequência de pontos p_0, p_1,…, p_n, obtendo assim uma curva poligonal.

   Obs.: Quando $t_i = i\Delta t$, diremos que a amostragem é uniforme. Caso contrário, a amostragem é adaptativa.



Poligonização de Curvas Implícitas

Objetivo: obter uma curva poligonal representada por uma sequência de pontos p_0, p_1,…, p_n, resolvendo $F^{-1}(0)$.

Problema: como estruturar os pontos $F^{-1}(0)$ de modo a obter uma curva poligonal correta?

Estratégia:

1. Construir uma triangulação $\mathcal{T} = \{T_i\}$ no domínio de F;
2. Aproximar em cada triângulo T_i a função F por uma função linear $\tilde{F}$;
3. Resolver $\tilde{F}(x, y) = 0$ em cada triângulo (obtendo um segmento de reta);
4. Estruturar a poligonização a partir da estrutura da triangulação.

Poligonização de Curvas Implícitas

1. Construção da Triangulação

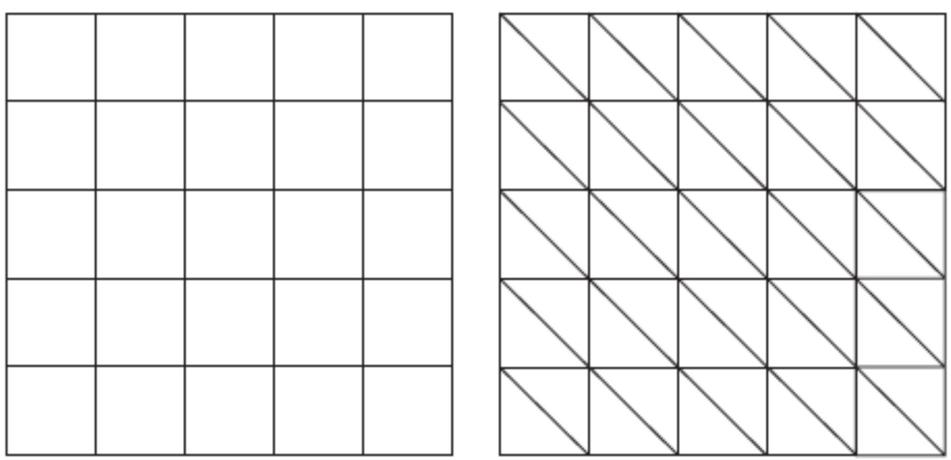
Seja $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ e $\gamma = F^{-1}(0)$. Seja $Q = [a,b] \times [a,b]$ um quadrado do plano tal que $\gamma \subset Q$.

Tome uma partição uniforme do intervalo [a,b]

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

onde $t_{i+1} - t_i = \Delta t = (b-a)/n$.

O produto cartesiano da partição define um reticulado de Q, de onde é possível obter facilmente uma triangulação de Q.



Poligonização de Curvas Implícitas

2. Aproximação Linear

Vamos definir $\tilde{F}: Q \mapsto \mathbb{R}$, linear em cada triângulo, e coincidindo com F nos vértices da triangulação.

Seja p um ponto arbitrário em um triângulo $v_1v_2v_3$. Usando coordenadas baricêntricas:

$$p = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

Daí:

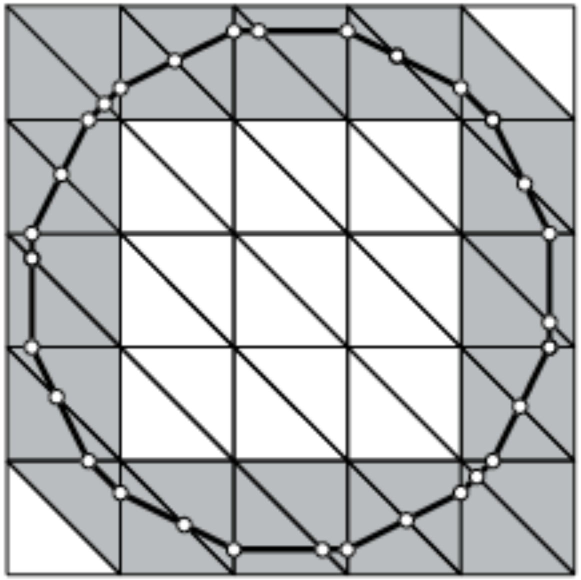
$$\tilde{F}(p) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + \lambda_3 F(v_3)$$

Poligonização de Curvas Implícitas

3. Solução e estruturação

É possível resolver analiticamente a equação linear $\tilde{F}(x, y) = 0$.

Na prática, o segmento desejado pode ser obtido analisando sua interseção com os bordos do triângulo, ou seja, onde o 0 cruza os bordos.



A ordenação dos segmentos segue diretamente das relações de vizinhança dos triângulos.

Interpolação Linear

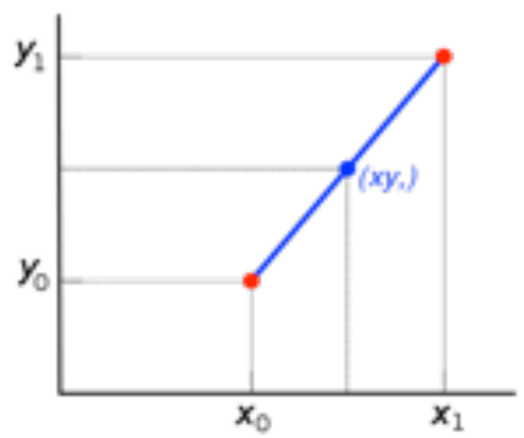
Método de interpolação que se utiliza de uma função linear p(x) (um polinômio de primeiro grau) para representar, por aproximação, uma suposta função f(x) que originalmente representaria as imagens de um intervalo descontínuo (ou degenerado) contido no domínio de f(x).

A interpolação linear entre dois pontos (x_a, y_a) e (x_b, y_b) pode ser deduzida usando-se proporcionalidade:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Daí:

$$y = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \text{ em um ponto } (x, y).$$

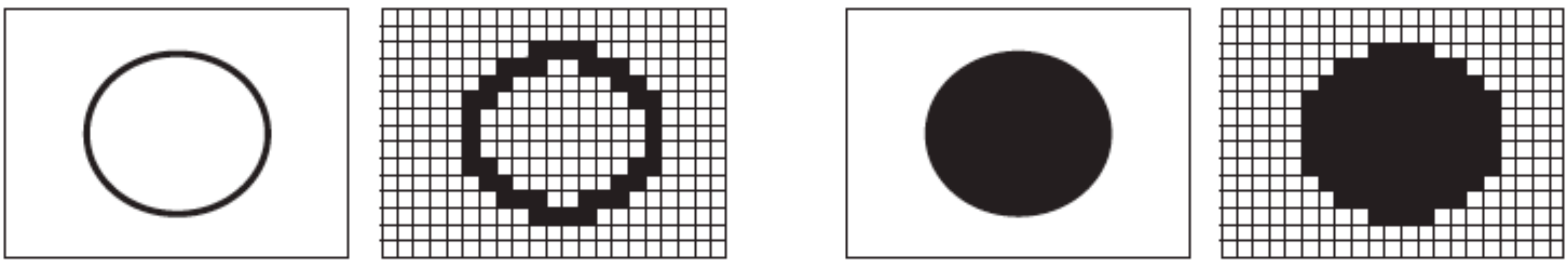


Representação por decomposição espacial

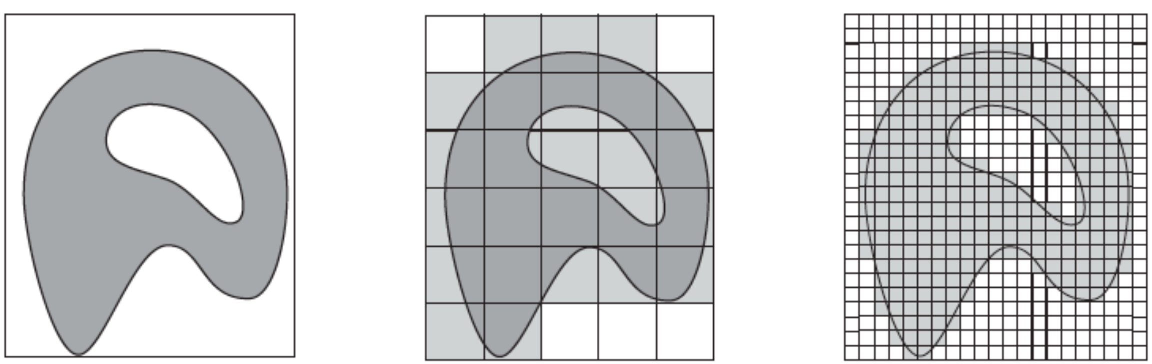
Caso mais simples: representação matricial (objetos matriciais)

Objetivo: discretizar objeto gráfico como união de retângulos de um reticulado uniforme do plano.

Rasterização: Processo de determinar uma representação matricial de um objeto gráfico.



Problemas topológicos: Representação matricial pode gerar inconsistências topológicas:



Rasterização

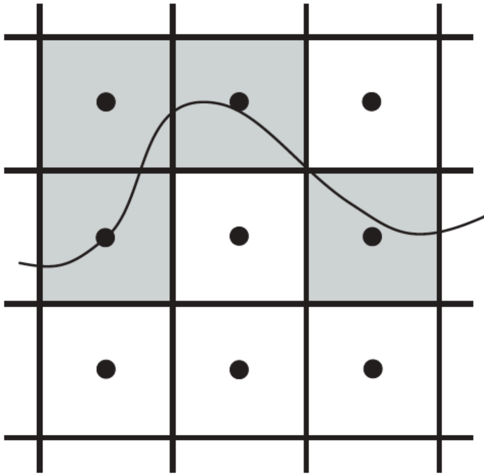
Processo de determinar uma representação matricial de um objeto gráfico.

Resultado da rasterização de um objeto gráfico com função de atributos de cor: imagem digital

Enumeração: subconjunto ordenado finito de células de um reticulado.

Rasterização: gerar enumeração que represente o objeto gráfico no reticulado.

Problema: Dada uma célula C_i, ela deve ser enumerada?
Solução 1: C_i é uma célula da representação se, e somente se, $C_i \cap U \neq \emptyset$, onde U é o suporte geométrico do objeto.
Cara!
Solução 2: Considere C_i uma célula da representação se seu centróide $P_i \in U$.
Aproximação muito grosseira!



Rasterização: Soluções Intermediárias

Estratégias Básicas

- **Rasterização Incremental**: define como as células do reticulado devem ser visitadas (caminho).
- **Rasterização por subdivisão**: subdivisões recursivas são aplicadas até que algum critério seja satisfeito.

Classificação das estratégias

- Intrínseca à geometria do objeto
- Espacial

Rasterização Incremental

Intrínseca

Células do reticulado são visitadas deslocando-se ao longo dos pontos do suporte geométrico do objeto gráfico

Exemplos:

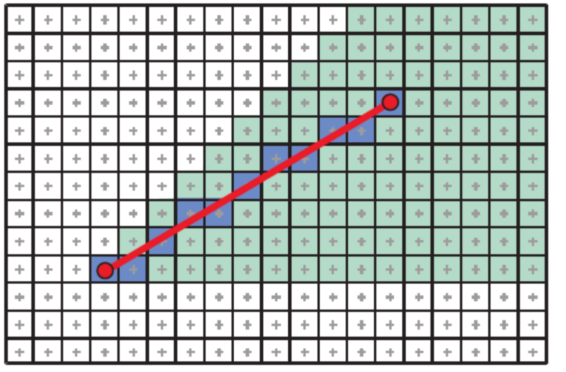
1. Curvas paramétricas $\gamma\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}^2$

Basta variar o parâmetro t para nos deslocarmos ao longo do reticulado.

2. Curvas implícitas $\gamma = F^{-1}(0)$

$grad(F) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ é perpendicular à curva, logo $T = \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}, -\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$

é tangente à curva. Logo, basta caminhar na direção T.



Rasterização Incremental

Espacial

Percorre-se todas as células do reticulado linha por linha (*scanline rasterization*).
Cara: é necessário percorrer n x n = n^2 células, onde aproximadamente n serão intersectadas.

Rasterização por Subdivisão

Intrínseca

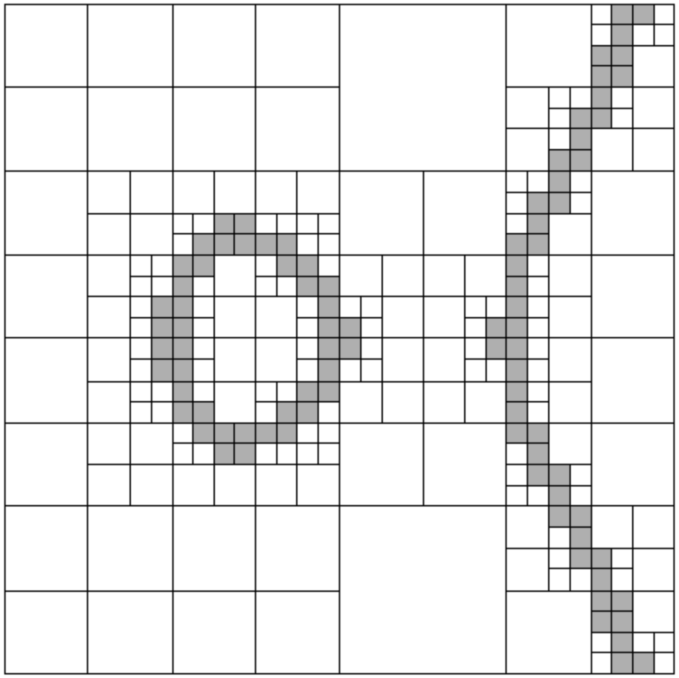
Estratégia: subdividimos o suporte geométrico do objeto até que cada subconjunto esteja contido em uma única célula.

Resultado: conjunto de células que contém algum desses subconjuntos.

Exemplo: curva paramétrica: basta subdividir recursivamente o intervalo [a, b] na metade.

Rasterização por Subdivisão

Espacial

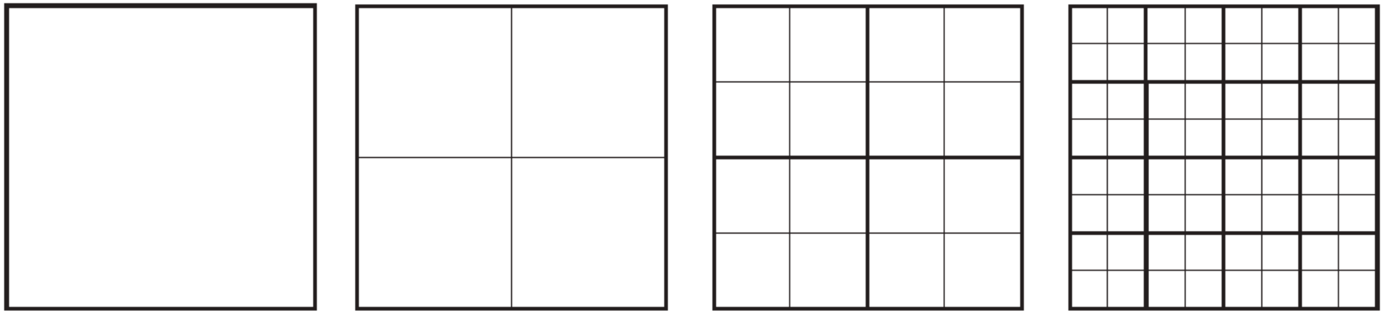


Estratégia: subdividimos um retângulo contendo o suporte geométrico do objeto gráfico em quatro sub-retângulos. A subdivisão prossegue recursivamente até que:

1. Não existam pontos do objeto gráfico contidos no sub-retângulo;

2. O sub-retângulo possua as dimensões da célula do reticulado.

Como resolver o problema de intersecção?



4ª Lista de Exercícios

Capítulo 7

1, 3, 5, 8, 17, 19

Entrega: 03/02

Site

http://www.im.ufal.br/professor/thales/icg.html