



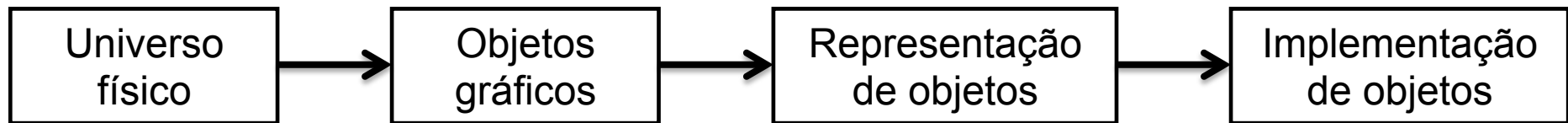
Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Objetos Gráficos Espaciais

Prof. Thales Vieira

Objetos Gráficos Espaciais

$$f: U \subset \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^3$$



$m=1$: Curvas 3D

$m=2$: Superfícies

$m=3$: Sólidos 3D

Curvas 3D

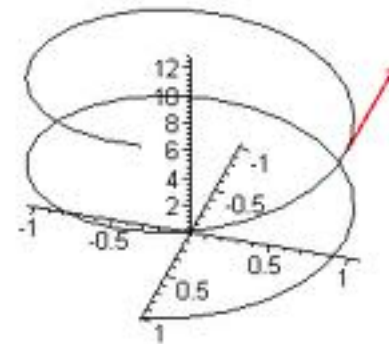
Objetos gráficos espaciais de dimensão 1

Aplicação $g: I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$

$$g(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I$$

Vetor velocidade:

$$g'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

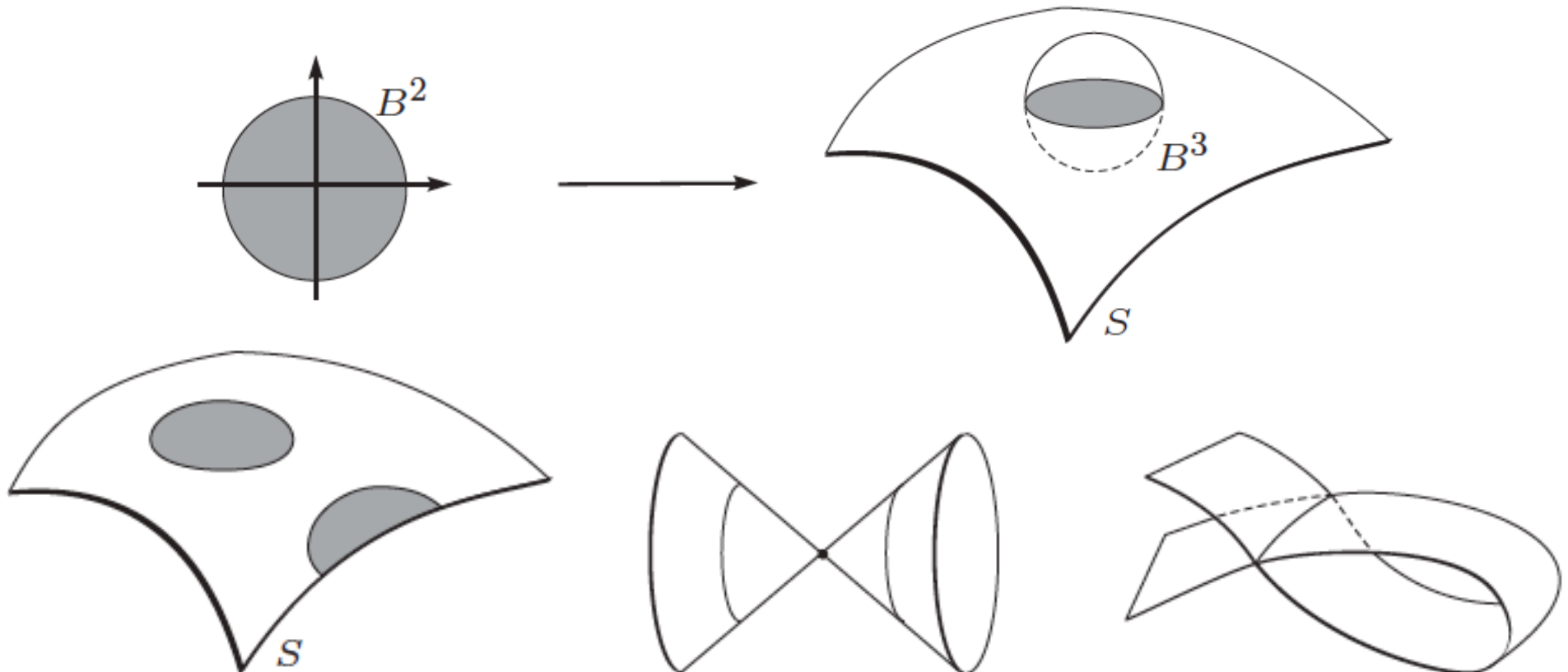


Superfícies

Uma superfície topológica é um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ localmente homeomorfo ao plano euclidiano \mathbb{R}^2 .

Para cada ponto $p \in S$ existe uma vizinhança esférica $B_\epsilon^3(p) \subset \mathbb{R}^3$ tal que $B_\epsilon^3(p) \cap S$ é homeomorfo ao disco aberto unitário

$$B_1^2(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$$



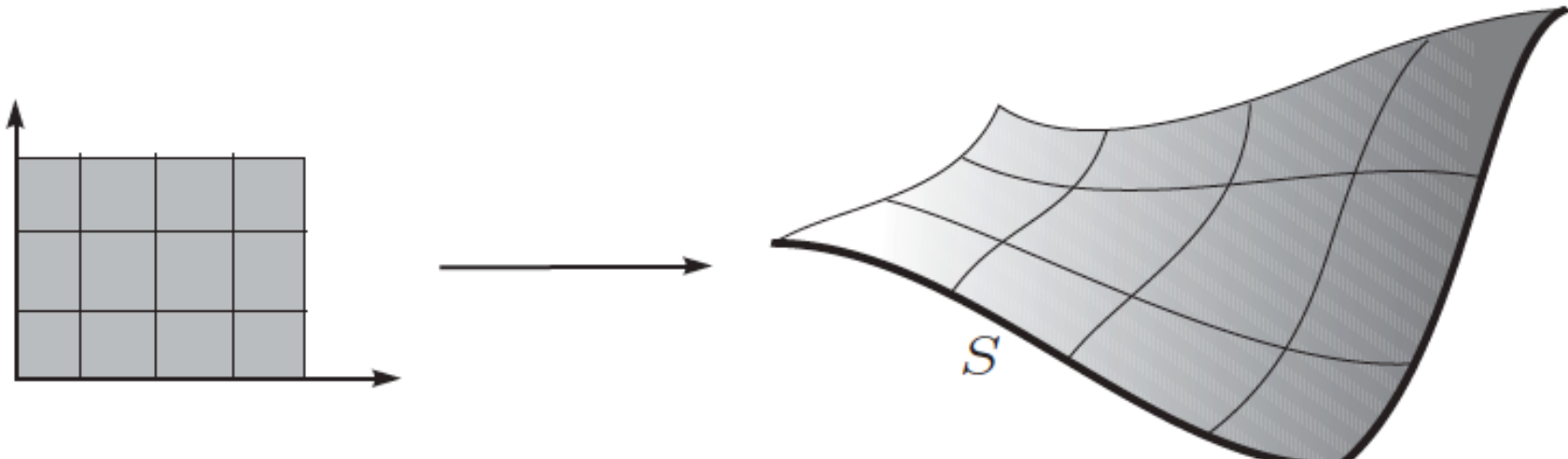
Descrição de Superfícies

Superfícies Paramétricas

Descrita por uma transformação $f: U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$, tal que $S = f(U)$ e as seguintes condições valem:

1. f é bijetiva em U ;
2. f' tem posto 2, ou seja:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u} \right) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial v} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v} \right) \text{ são L.I.}$$



Descrição de Superfícies

Superfícies Paramétricas

Exemplo: Cilindro

Definido como o conjunto de pontos equidistantes de uma reta (eixo do cilindro). A distância dos pontos à reta é o raio do cilindro.

Seja z o eixo de um cilindro de raio R .

Se (x, y, z) pertence ao cilindro, então (x, y) pertence ao círculo de raio R centrado na origem do plano xy , parametrizado por

$$(x, y) = (R \cdot \cos(u), R \cdot \sen(u)), \quad u \in \mathbb{R}$$

Daí, temos a parametrização do cilindro $f: [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$

$$f(u, v) = (R \cdot \cos(u), R \cdot \sen(u), v).$$

Descrição de Superfícies

Superfícies Implícitas

Uma superfície implícita é definida pelo conjunto das raízes de uma função $F: U \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, ou seja:

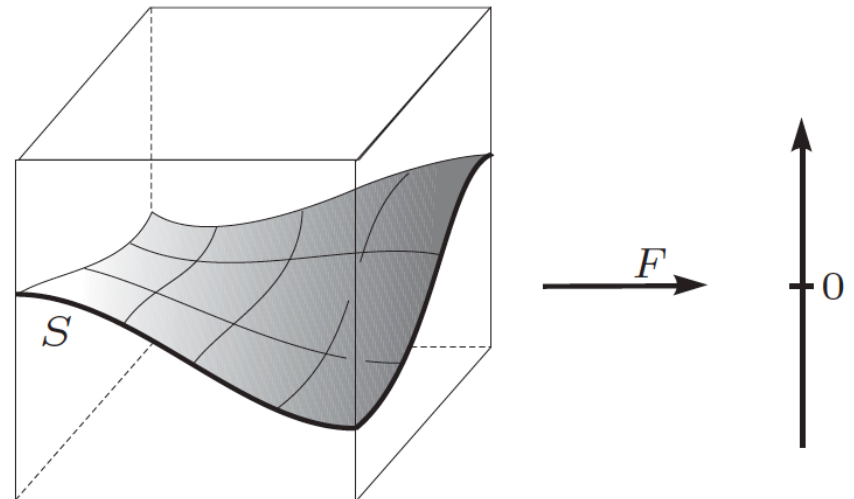
$$S = F^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in U; F(x, y, z) = 0\}$$

Chamada de superfície de nível de F . Fazendo $F(x, y, z) = c$, temos uma superfície de nível c , ou **isosuperfície**.

Para evitar superfícies degeneradas, é necessário que c seja um valor regular, ou seja:

$$\text{grad}(f) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \neq 0$$

nos pontos de $S = F^{-1}(0)$.



Descrição de Superfícies

Superfícies Implícitas

Exemplo: Esfera de raio R centrada na origem

Formada pelos pontos equidistantes da origem de raio R :

$$\|(x, y, z) - (0, 0, 0)\| = R$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

S é definida implicitamente pela função $F: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2,$$

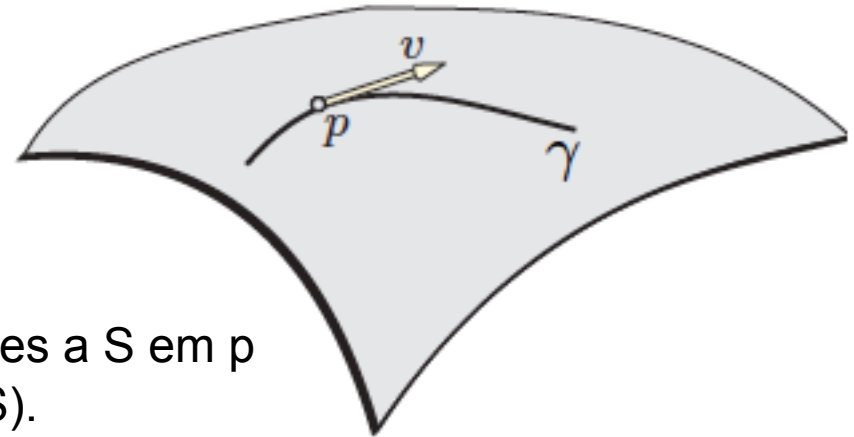
onde $S = F^{-1}(0)$.

Atributos Geométricos das Superfícies

Seja $p \in S \subset \mathbb{R}^3$ um ponto de uma superfície. Um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ é tangente a S em p se existe uma curva $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \mapsto S$ tal que:

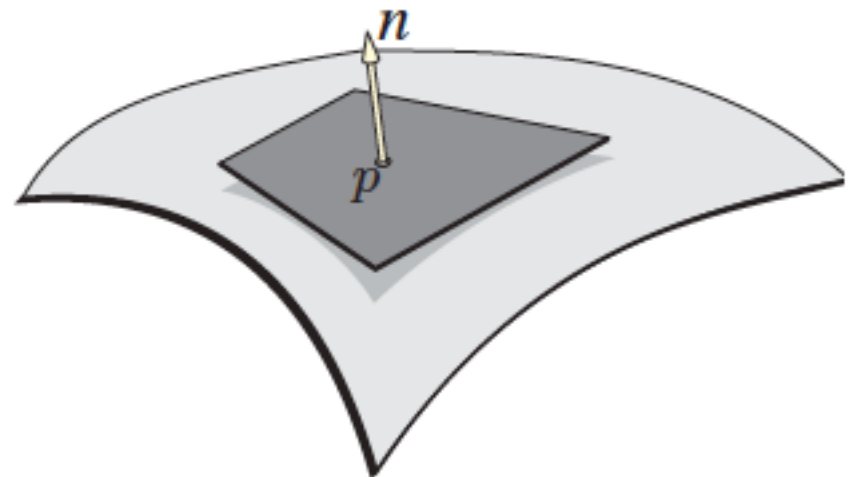
$$\gamma(0) = p$$

$$\gamma'(0) = v$$



O conjunto de todos os vetores tangentes a S em p forma o plano tangente de S em p ($T_p S$).

Um vetor $n \in \mathbb{R}^3$ é normal à superfície S em p se n é perpendicular a $T_p S$.



Atributos Geométricos das Superfícies

Superfícies Paramétricas

$$f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$$

Vetor normal:
$$\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$$

Vetor direcional da curva coordenada $f(u, v_0)$:
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u} \right)$$

Vetor direcional da curva coordenada $f(u_0, v)$:
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v} \right)$$

Como $\frac{\partial f}{\partial u}$ e $\frac{\partial f}{\partial v}$ são L.I., \vec{n} não se anula.

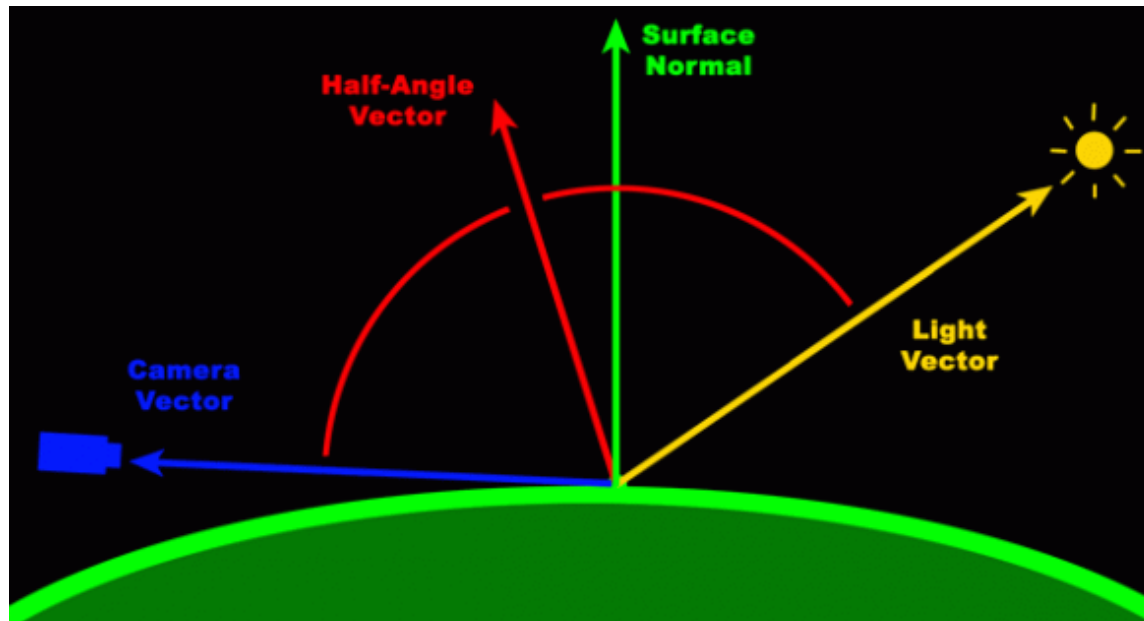
Atributos Geométricos das Superfícies

Superfícies Implícitas

O vetor normal de uma superfície definida implicitamente $S = F^{-1}(0)$ é dado pelo gradiente:

$$\vec{n} = \text{grad}(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

O vetor normal é **essencial** para o cálculo de iluminação de superfícies.



Objetos Volumétricos (Sólidos)

Análogo 3D da região plana

Sólido: Subconjunto limitado $V \subset \mathbb{R}^3$ tal que para todo $p \in V$ existe uma vizinhança esférica aberta $B_\epsilon^3(p)$ tal que $B_\epsilon^3(p) \cap V$ é homeomorfo à bola unitária

$$B_1^3(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

ou à bola unitária

$$\tilde{B}_1^3(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1 \text{ e } z \geq 0\}$$

Objeto volumétrico de dimensão n: objeto gráfico de dimensão n mergulhado em \mathbb{R}^n .

Exemplos:

Região plana

Imagem

Descrição de Objetos Volumétricos

Descrição por Bordo

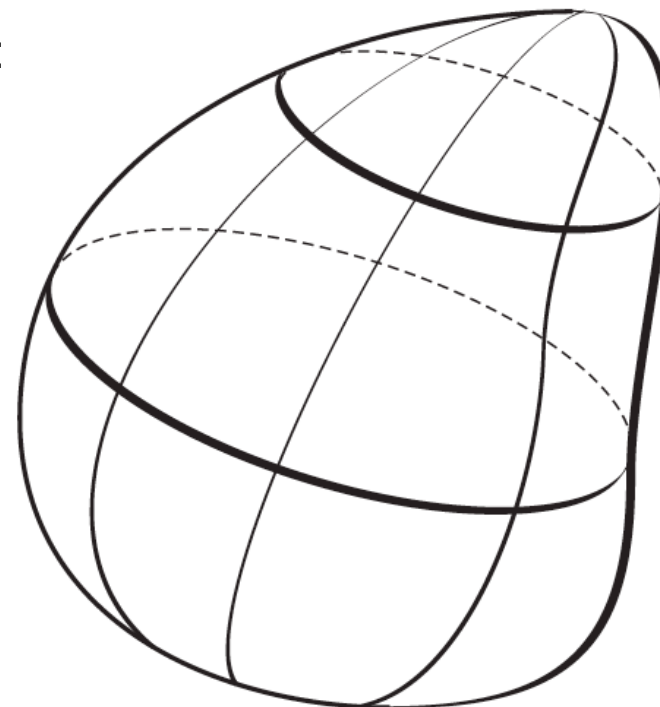
Teorema de Jordan no espaço tridimensional:

“Uma superfície compacta M em \mathbb{R}^3 divide o espaço em duas regiões R_1 e R_2 , uma limitada e outra ilimitada, das quais M é a fronteira comum.”

A região R_1 limitada define um sólido do espaço.

Etapas da descrição de um sólido pelo bordo:

1. Descrição da superfície do bordo;
2. Solução do problema de classificação ponto-conjunto.

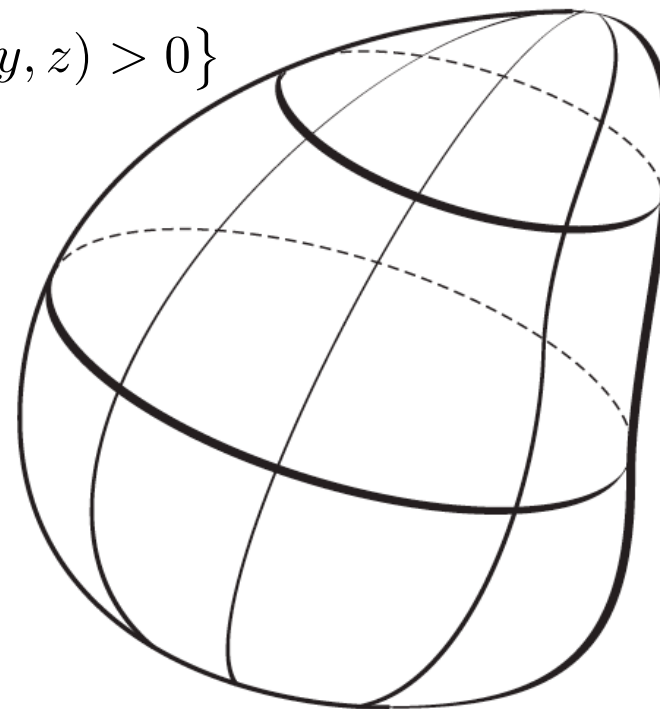


Descrição de Objetos Volumétricos

Descrição por funções implícitas

Seja $F: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$. Se $S = F^{-1}(0)$ é limitada, F divide o espaço em três subconjuntos:

1. Região limitada R_1 : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, z) < 0\}$
2. Superfície S : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, z) = 0\}$
3. Região ilimitada R_2 : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, z) > 0\}$



Descrição de Objetos Volumétricos

Descrição por funções implícitas

Podemos interpretar F como a função de densidade do sólido.

Se d é uma densidade, e F a função de densidade do sólido, então os pontos $\{p \in \mathbb{R}^3; F(p) < d\}$ definem um volume implícito com densidade menor que d .



Triangulação no espaço

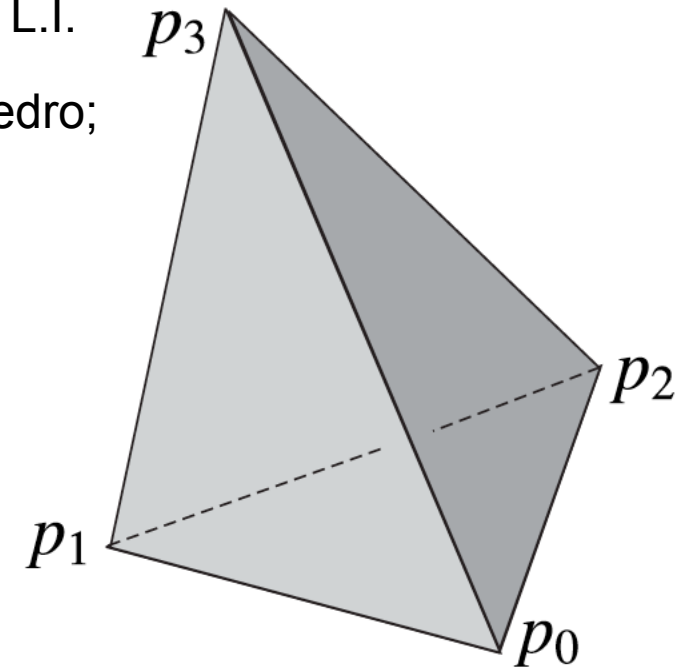
2D: Malhas de triângulos representando superfícies

Definição análoga à triangulação no plano, porém os pontos pertencem ao \mathbb{R}^3 .

3D: Malhas de tetraedros representando volumes

Dados quatro pontos p_0, p_1, p_2, p_3 em \mathbb{R}^3 , diremos que estes formam um **tetraedro** se os vetores $p_1-p_0, p_2-p_0, p_3-p_0$ forem L.I.

- Os pontos p_0, p_1, p_2, p_3 são **vértices** do tetraedro;
- Os segmentos $p_0p_1, p_1p_2, p_0p_2, p_0p_3, p_1p_3$ e p_2p_3 são **arestas** do tetraedro;
- Os triângulos $p_0p_1p_2, p_0p_1p_3, p_0p_2p_3$ e $p_1p_2p_3$ são **faces** do tetraedro.



Triangulação no espaço

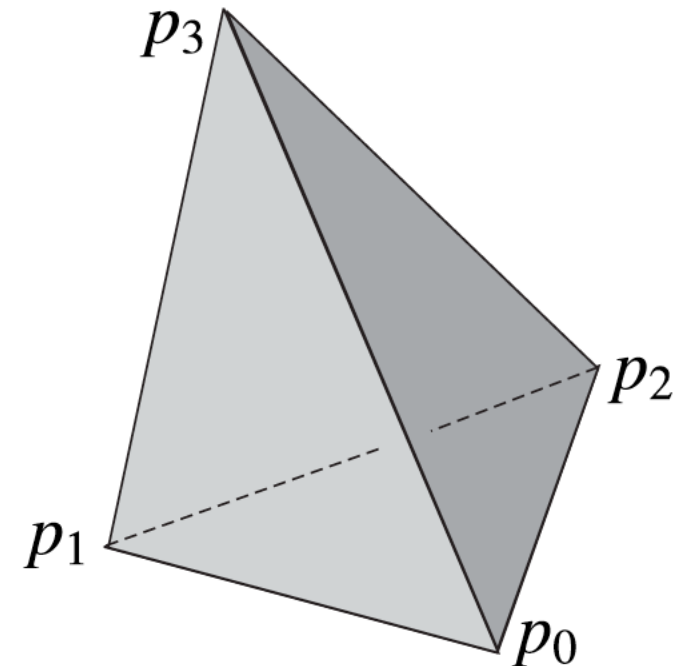
Sistema de coordenadas do tetraedro

Um tetraedro possui um sistema de coordenadas local definido por coordenadas baricêntricas. Se p pertence ao tetraedro $p_0p_1p_2p_3$, então:

$$p = t_0p_0 + t_1p_1 + t_2p_2 + t_3p_3, \quad \text{onde } 0 \leq t_i \leq 1 \text{ e } \sum_i t_i = 1$$

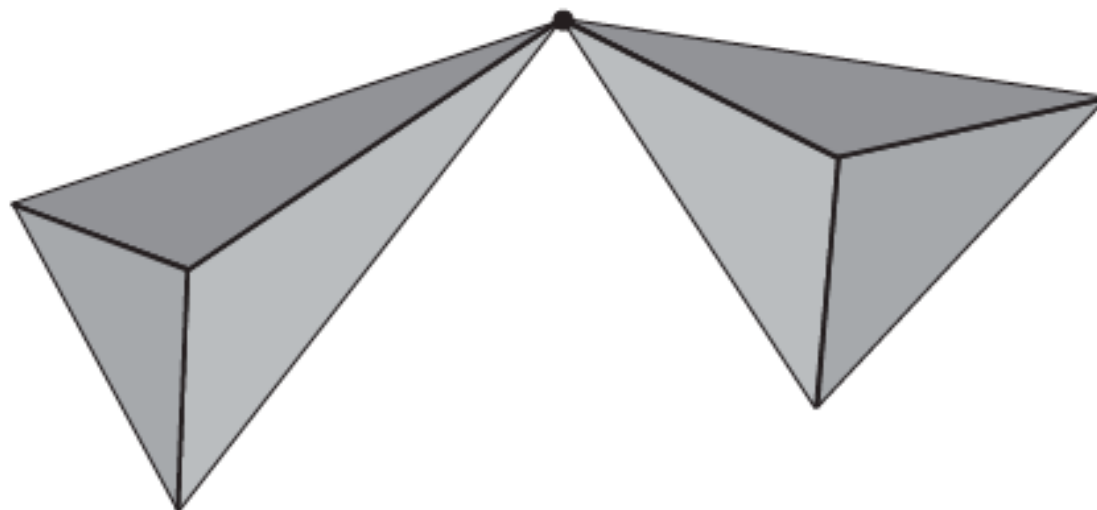
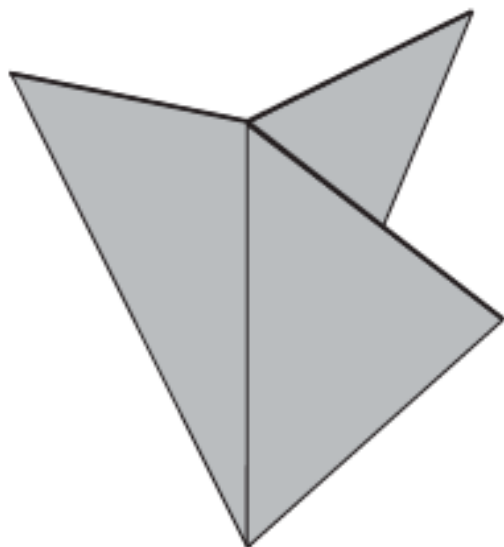
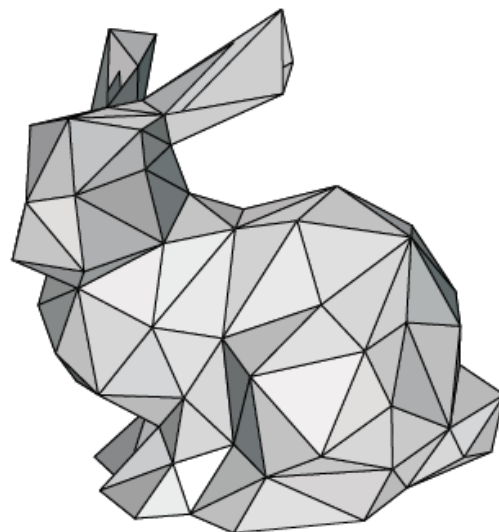
Triangulação 3D

Conjunto finito de tetraedros, tal que a intersecção de dois tetraedros é vazia, um vértice, uma aresta ou uma face.



Superfícies Poliédricas

Triangulação 2D no espaço que é uma superfície topológica.



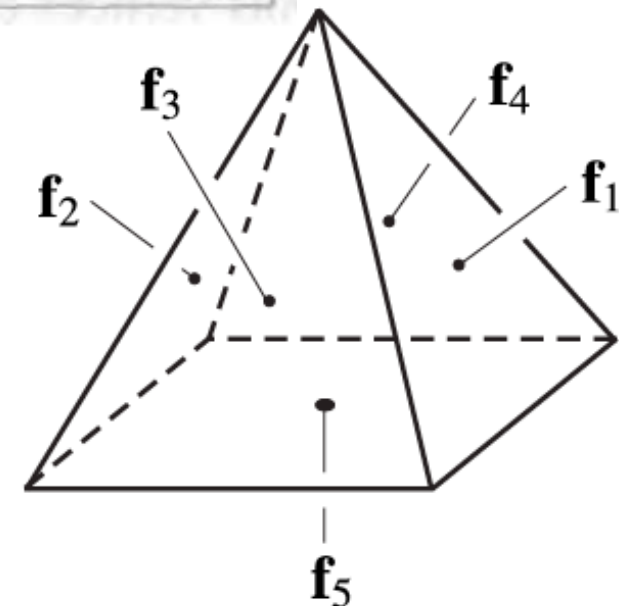
Codificação de Superfícies Poliédricas

Codificação explícita

Codifica cada polígono como lista de seus vértices com suas coordenadas.

Codificação explícita
$\mathbf{f}_1 = ((x_1, y_1, z_1), (x_5, y_5, z_5), (x_2, y_2, z_2))$
$\mathbf{f}_2 = ((x_3, y_3, z_3), (x_2, y_2, z_2), (x_5, y_5, z_5))$
$\mathbf{f}_3 = ((x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), (x_5, y_5, z_5))$
$\mathbf{f}_4 = ((x_1, y_1, z_1), (x_4, y_4, z_4), (x_5, y_5, z_5))$
$\mathbf{f}_5 = ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4))$

- Extremamente simples
- Redundância na codificação dos vértices:
Armazenamento desnecessário;
Erros numéricos distintos.



Codificação de Superfícies Poliédricas

Problemas de consulta comuns

- Achar arestas incidentes em um vértice;
- Achar polígonos que compartilham uma aresta ou vértice;
- Achar arestas que delimitam polígono;

Codificação explícita não resolve eficientemente os problemas acima!

Codificação de Superfícies Poliédricas

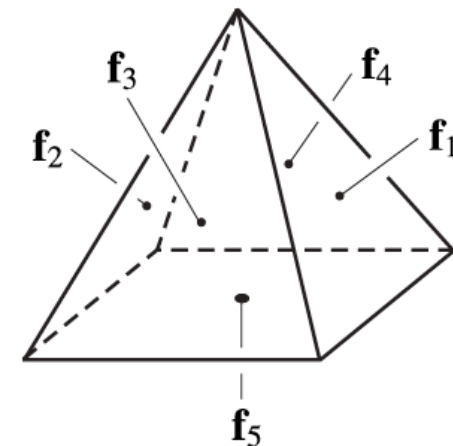
Codificação com lista de vértices

Cria uma lista de vértices e uma lista de faces que aponta para vértices da lista de vértices.

Lista de Vértices
$\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$
$\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$
$\mathbf{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$
$\mathbf{v}_4 = (x_4, y_4, z_4)$
$\mathbf{v}_5 = (x_5, y_5, z_5)$

Lista de faces
$\mathbf{f}_1 \rightarrow (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_2)$
$\mathbf{f}_2 \rightarrow (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5)$
$\mathbf{f}_3 \rightarrow (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$
$\mathbf{f}_4 \rightarrow (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$
$\mathbf{f}_5 \rightarrow (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$

Polígonos que compartilham aresta?
Arestas são desenhadas duas vezes.



Codificação de Superfícies Poliédricas

Codificação com lista de arestas

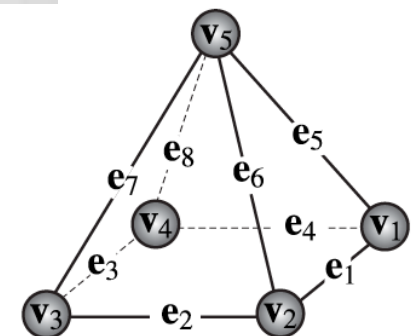
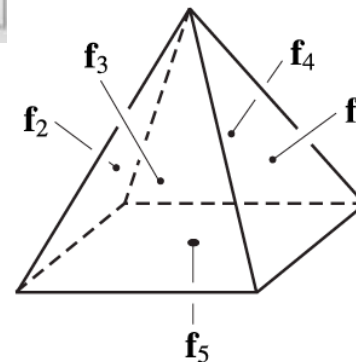
Acrescenta uma lista de arestas apontando para os vértices da lista de vértices.

A lista de faces passa a apontar para arestas da lista de arestas.

Lista de Vértices	Lista de Arestas	Lista de Faces
$v_1 = (x_1, y_1, z_1)$	Arestas → Vértices	Face → arestas
$v_2 = (x_2, y_2, z_2)$	$e_1 \rightarrow v_1, v_2$	$f_1 \rightarrow e_1, e_5, e_6$
$v_3 = (x_3, y_3, z_3)$	$e_2 \rightarrow v_2, v_3$	$f_2 \rightarrow e_2, e_6, e_7$
$v_4 = (x_4, y_4, z_4)$	$e_3 \rightarrow v_3, v_4$	$f_3 \rightarrow e_3, e_7, e_8$
$v_5 = (x_5, y_5, z_5)$	$e_4 \rightarrow v_4, v_1$	$f_4 \rightarrow e_4, e_8, e_5$
	$e_5 \rightarrow v_1, v_5$	$f_5 \rightarrow e_1, e_2, e_3, e_4$
	$e_6 \rightarrow v_2, v_5$	
	$e_7 \rightarrow v_3, v_5$	
	$e_8 \rightarrow v_4, v_5$	

Acesso direto à arestas

Arestas incidentes em um vértice?

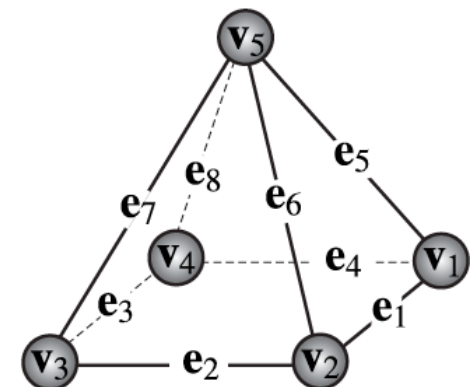
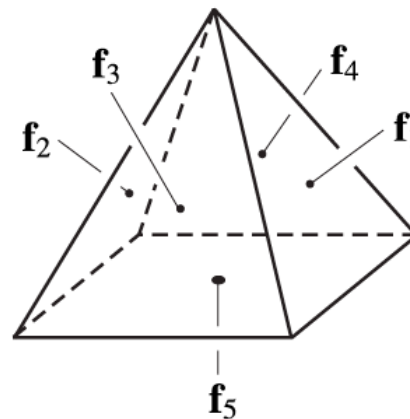


Codificação de Superfícies Poliédricas

Codificação com lista de arestas

Determinando faces que compartilham arestas:

Lista de Arestas	
Arestas \rightarrow Vértices + faces	
e_1	$\rightarrow v_1, v_2, f_1, f_5$
e_2	$\rightarrow v_2, v_3, f_3, f_5$
e_3	$\rightarrow v_3, v_4, f_2, f_5$
e_4	$\rightarrow v_4, v_1, f_4, f_5$
e_5	$\rightarrow v_1, v_5, f_1, f_4$
e_6	$\rightarrow v_2, v_5, f_1, f_3$
e_7	$\rightarrow v_3, v_5, f_2, f_5$
e_8	$\rightarrow v_4, v_5, f_2, f_4$



Representação de superfícies usando Triangulações

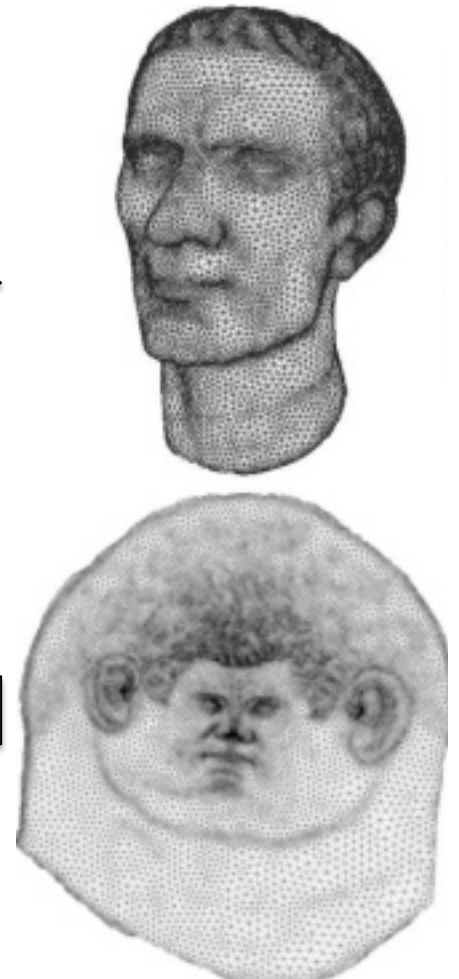
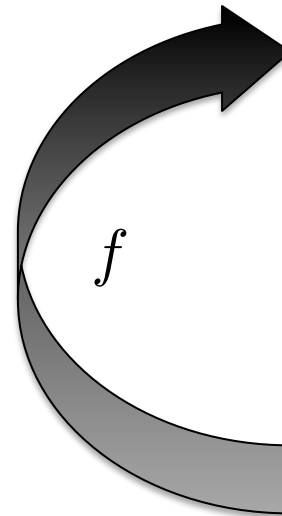
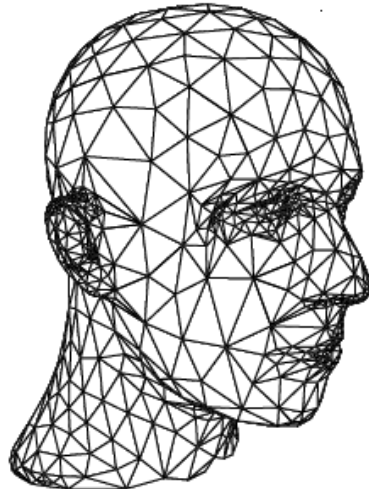
Podemos representar uma superfície S com uma triangulação 2D, através de um processo de amostragem e interpolação linear por partes.

Como estruturar as amostras?

Dada uma superfície paramétrica representada por

$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$$

podemos triangular seu domínio plano U , e automaticamente teremos a estrutura da triangulação 2D no espaço.



Representação por subdivisão paramétrica

Uma superfície S possui uma representação por subdivisão paramétrica se puder ser decomposta em sub-superfícies S_i (*patches*), tal que

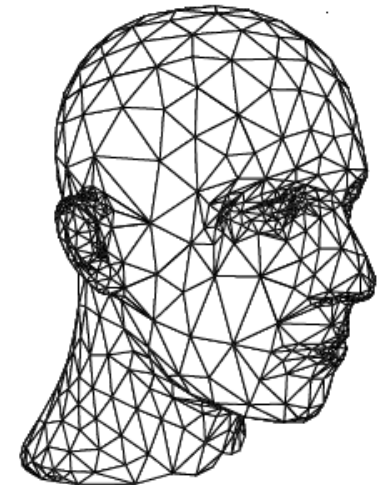
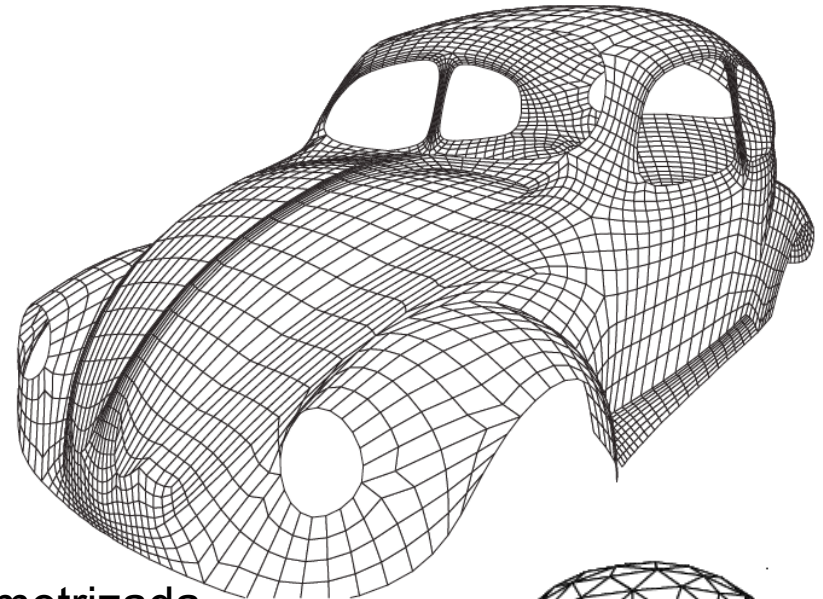
$$S = \bigcup_i S_i$$

e cada S_i possui uma parametrização

$$\varphi_i: U \mapsto S_i$$

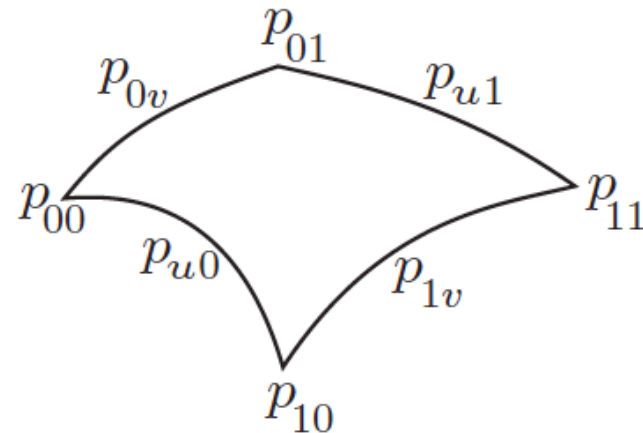
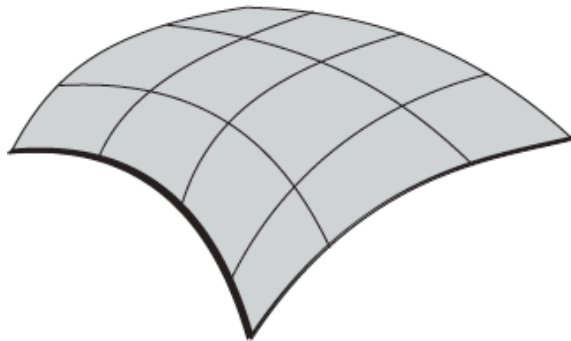
Exemplo: Superfície poliédrica

Cada triângulo é uma sub-superfície parametrizada (linearmente) pelas coordenadas baricêntricas.



Representação dos *patches*

- Representação pelos vértices;
- Representação por duas curvas da fronteira;
- Representação pelas quatro curvas da fronteira;



Representação pelos vértices

Problema: reconstruir o *patch* (sub-superfície) usando os quatro pontos $P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$.

Solução: Interpolação bilinear

Queremos achar uma transformação $T: [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que:

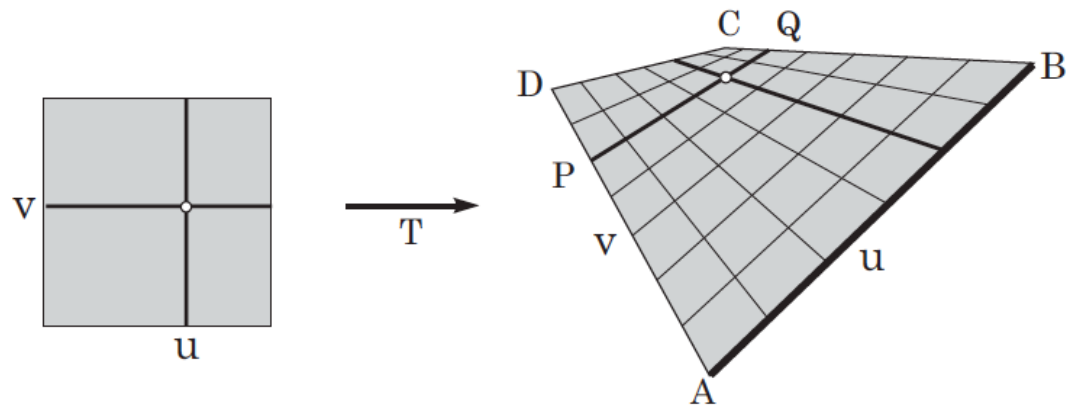
$$T(0,0) = A, \quad T(1,0) = B, \quad T(0,1) = C, \quad T(1,1) = D.$$

Dado $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$, temos:

$$P = (1 - v)A + vD$$

$$Q = (1 - v)B + vC$$

$$T(u, v) = (1 - u)P + uQ$$



Representação pelos vértices

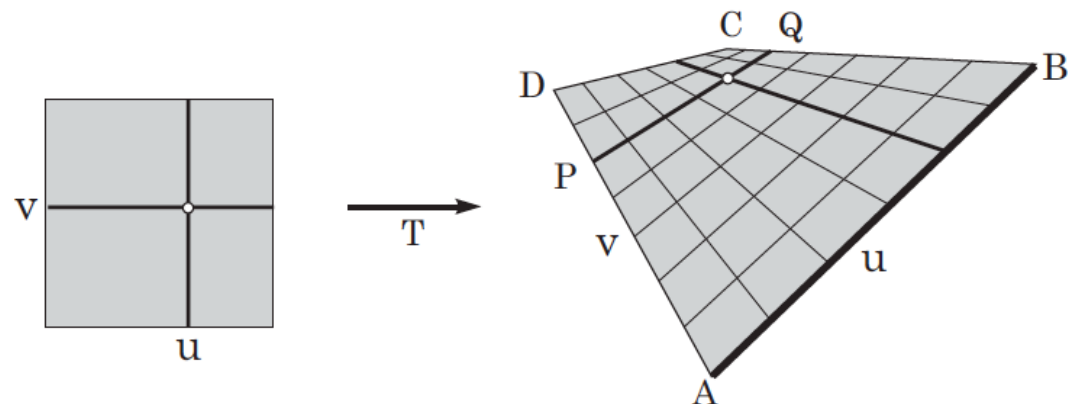
$$Q = (1 - v)B + vC$$

$$T(u, v) = (1 - u)P + uQ$$

$$T(u, v) = (1 - u)[(1 - v)A + vD] + u[(1 - v)B + vC]$$

$$T(u, v) = (1 - u)(1 - v)A + (1 - u)vD + u(1 - v)B + uvC$$

$$T(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - u & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - v \\ v \end{pmatrix}$$

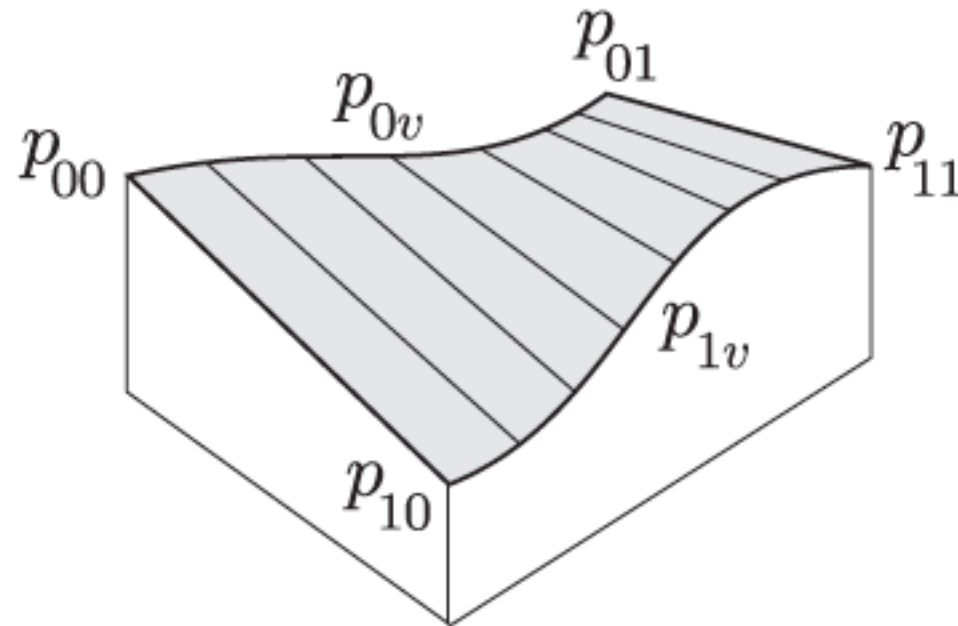


Representação por duas curvas da fronteira

Problema: reconstruir o *patch* (sub-superfície) usando duas curvas da fronteira

Solução: Interpole linearmente as duas curvas da fronteira dadas (*lofting*).

As outras duas curvas da fronteira são aproximações lineares!



Representação pelas quatro curvas da fronteira

Problema: reconstruir o *patch* (sub-superfície) usando e respeitando as quatro curvas da fronteira p_{0v} , p_{1v} , p_{u0} , p_{u1} .

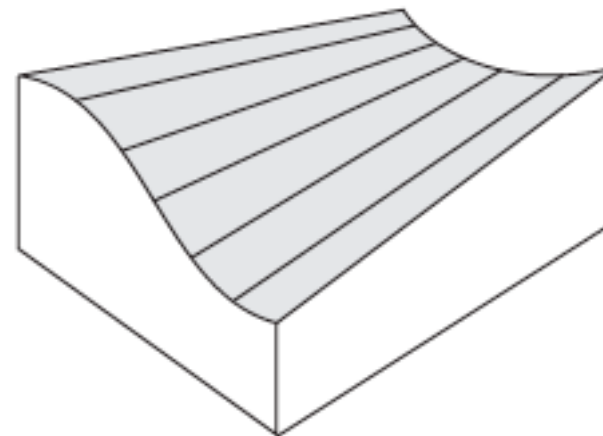
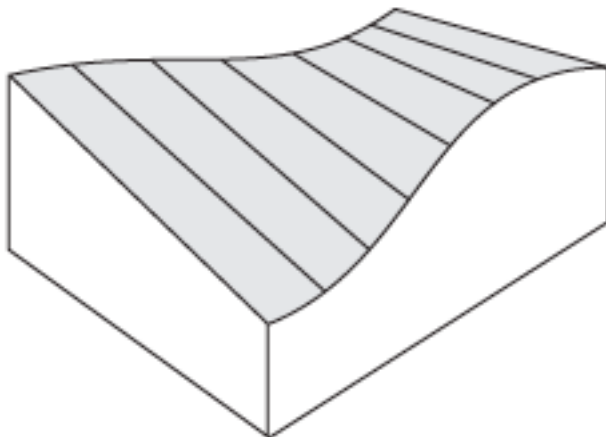
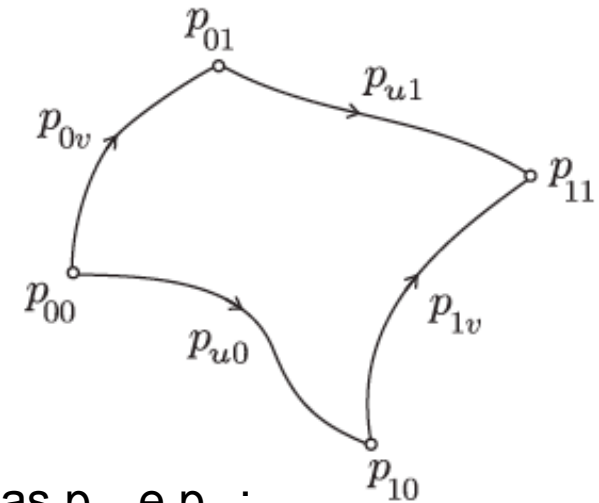
Solução:

1. Lofting vertical: Interpola linearmente as curvas p_{u0} e p_{u1} :

$$(1 - v)p_{u0}(u) + vp_{u1}(u)$$

2. Lofting horizontal: Interpola linearmente as curvas p_{0v} e p_{1v} :

$$(1 - u)p_{0v}(v) + up_{1v}(v)$$



Representação pelas quatro curvas da fronteira

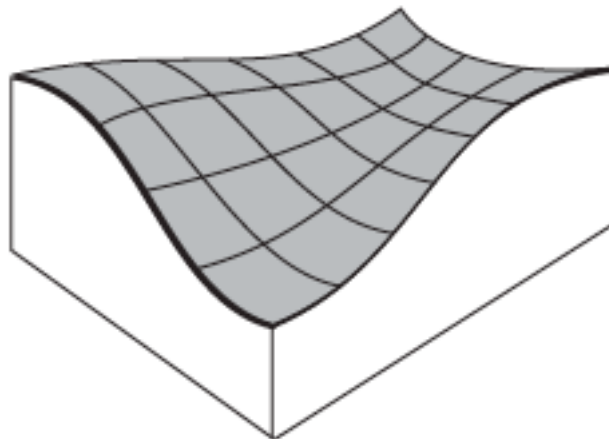
3. Soma dos Loftings:

$$\tilde{C}(u, v) = (1 - v)p_{u0}(u) + vp_{u1}(u) + (1 - u)p_{0v}(v) + up_{1v}(v)$$

4. Subtração bilinear: Subtraímos de $\tilde{C}(u, v)$ a paramerização bilinear $B(u, v)$, obtendo:

$$C(u, v) = \tilde{C}(u, v) - B(u, v)$$

Respeita curvas da fronteira!



Representação de superfícies implícitas

$$S = F^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in U; F(x, y, z) = 0\}$$

Poligonização de superfícies implícitas

Extensão da poligonização de curvas planares implícitas

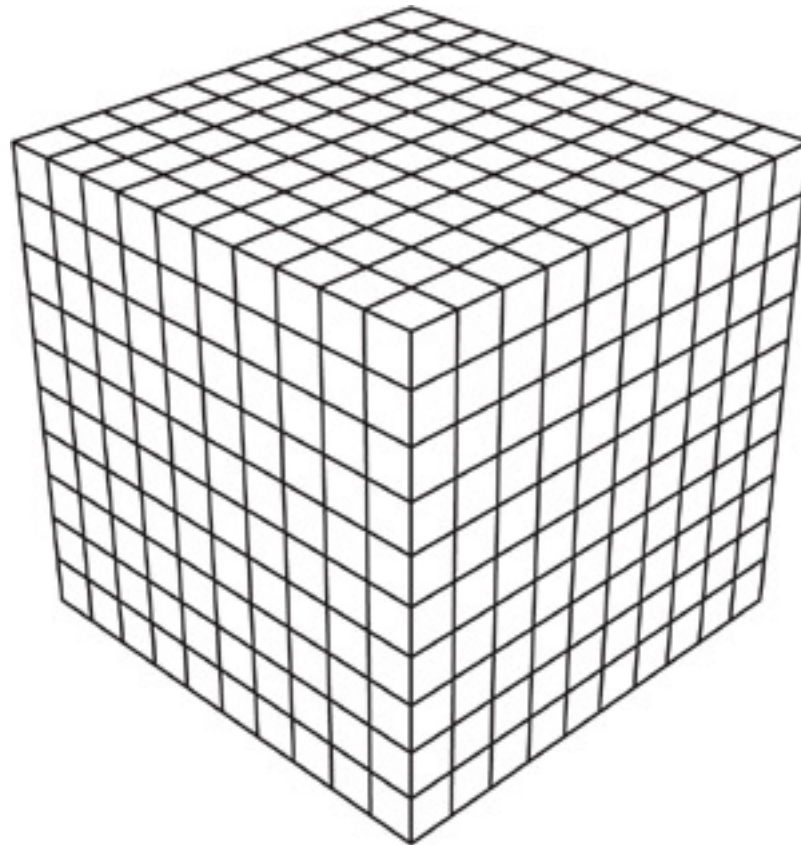
Marching Cubes (ignore método do livro)

1. Obter uma subdivisão do espaço
2. Resolver o problema localmente em cada elemento da subdivisão
3. Estruturar as soluções locais para obter a solução global

Representação de superfícies implícitas

Subdivisão do espaço

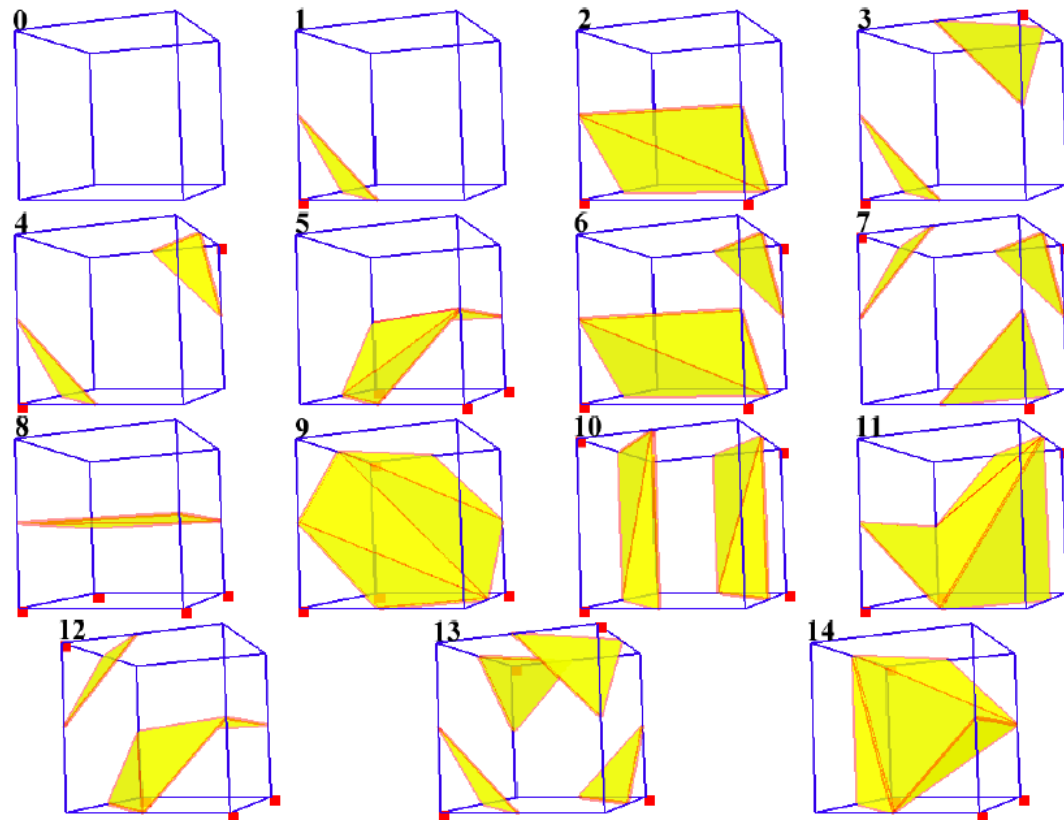
- Reticulado uniforme do espaço: cubo de mesmo tamanho
- União das triangulações nos cubos será a triangulação global do espaço



Representação de superfícies implícitas

Solução local

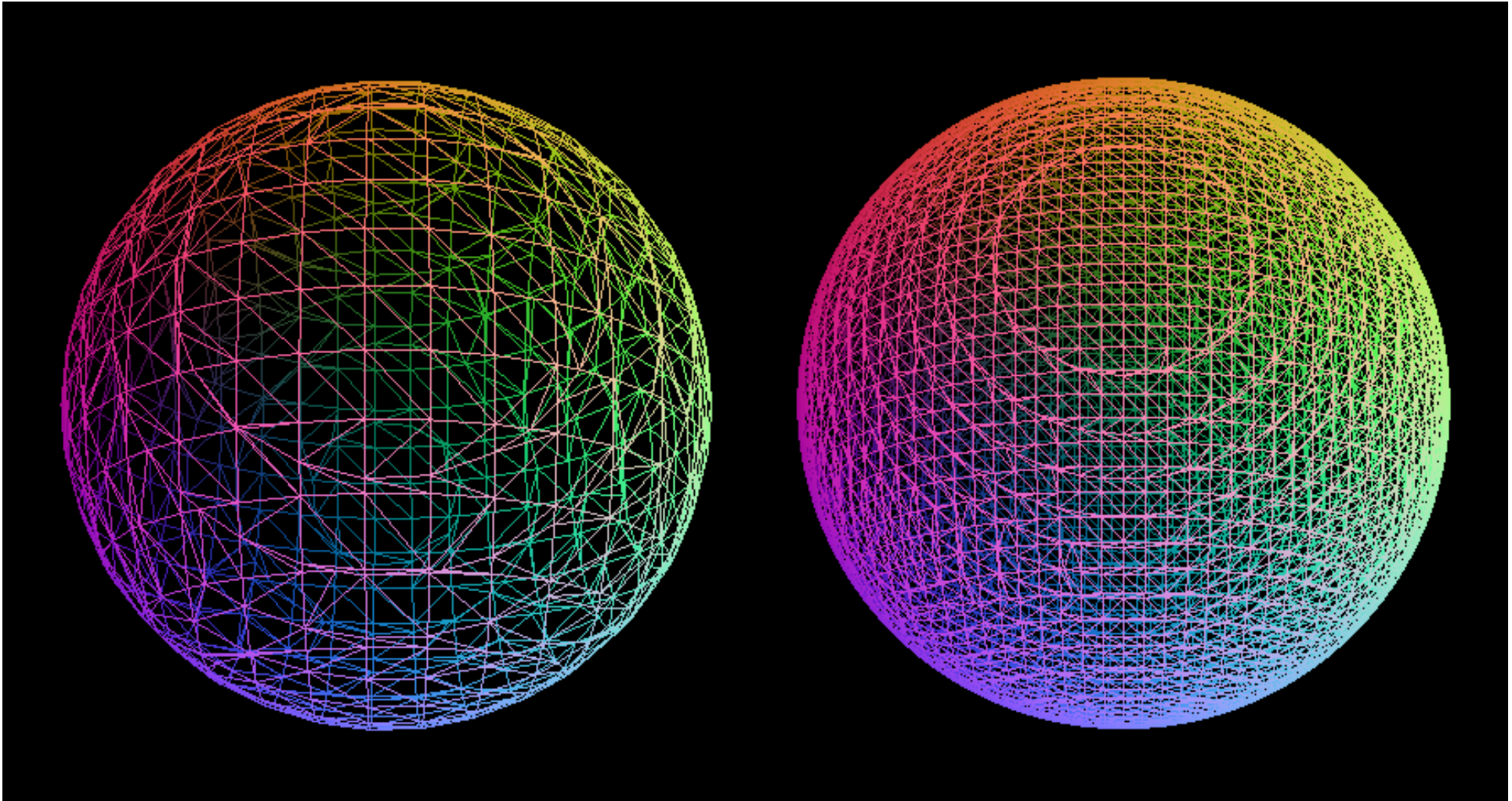
- Descobrir em que pontos das arestas a função passa de negativo para positivo ou vice-versa
- Criar triângulos de acordo com um dos casos:



Representação de superfícies implícitas

Estruturar soluções locais

- Cubos vizinhos geram triângulos vizinhos (compartilhamento de arestas)



Representação de objetos volumétricos

$$V \subset \mathbb{R}^3, \quad V = \{(x, y, z); F(x, y, z) \leq 0\}$$

Representação por bordo (B-rep, ou *Boundary Representation*)

$$S = F^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in U; F(x, y, z) = 0\}$$

Muito útil para visualizar o volume por uma superfície com uma determinada densidade

Não é capaz de representar densidade variável!!



Representação de objetos volumétricos

$$V \subset \mathbb{R}^3, \quad V = \{(x, y, z); F(x, y, z) \leq 0\}$$

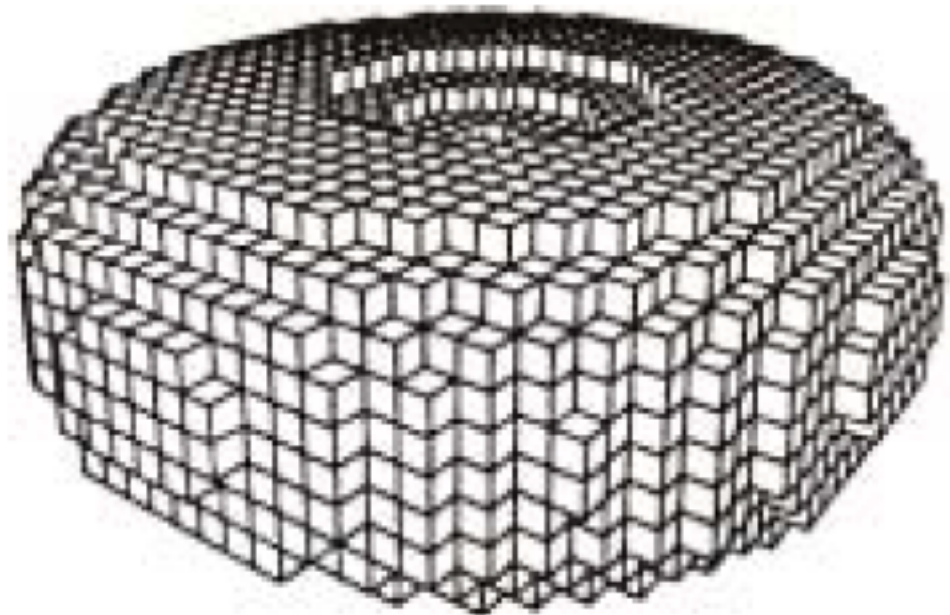
Representação por decomposição

Divide-se o volume V em células volumétricas v_0, v_1, \dots, v_n , e enumera-se essas células (análogo ao caso 2D)

Cada célula contém uma amostra da função de densidade

Classes de decomposição:

- Uniforme
- Não-uniforme



Representação de objetos volumétricos

Representação matricial (decomposição uniforme)

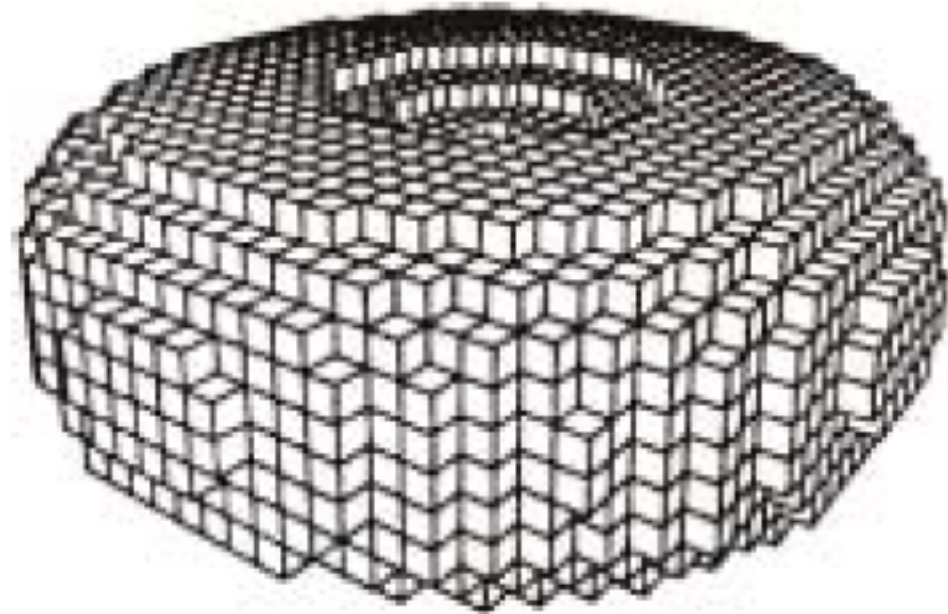
Definimos um reticulado uniforme 3D (análogo ao caso 2D)

Partição dos eixos:

$$\{i\Delta x; i = 0, \dots, m\}$$

$$\{j\Delta y; j = 0, \dots, m\}$$

$$\{k\Delta z; k = 0, \dots, m\}$$



Reticulado uniforme: produto cartesiano dessas partições

Célula no caso 2D: *pixel*

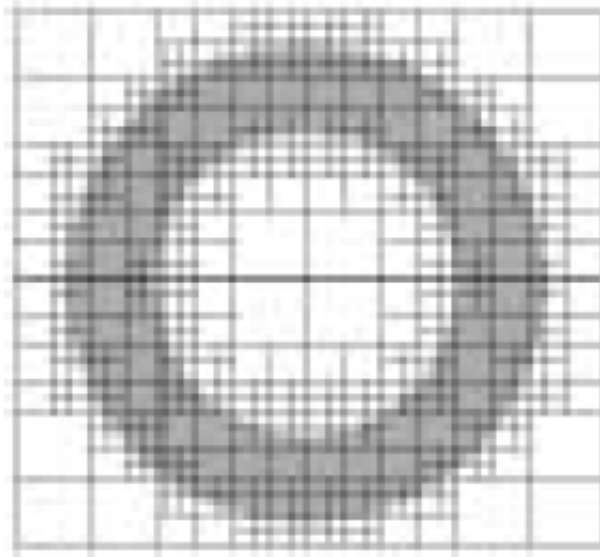
Célula no caso 3D: *voxel*

Também chamado **Imagem 3D**

Representação de objetos volumétricos

Representação não-uniforme

Octrees, Kd-trees, etc.



Melhor adaptação dos dados

Mais complexas de serem manipuladas

5^a Lista de Exercícios

Capítulo 8

6, 18, 20, 22

Entrega: 06/02

Site

<http://www.im.ufal.br/professor/thales/icg.html>