Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Matemática

Geometria

Prof. Thales Vieira

2014

Geometria Euclidiana

Espaço $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$$

Operações entre elementos de $\mathbb{R}^n$

Soma:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Multiplicação por número real:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

Transformações Lineares

Transformações $L\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ que preservam a estrutura linear do $\mathbb{R}^n$.

Propriedades:

$$L(u+v) = L(u) + L(v)$$

$$L(\lambda u) = \lambda L(u),$$

$$u, v \in \mathbb{R}^n \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Transformações Lineares: Representação matricial

Considere a base canônica do $\mathbb{R}^n$:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, \ldots, 0);\\
e_2 &= (0, 1, \ldots, 0);\\
&\vdots\\
e_n &= (0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}
$$

Seja

$$
\begin{aligned}
a_1 &= L(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})\\
a_2 &= L(e_2) = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})\\
&\vdots\\
a_n &= L(e_n) = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}).
\end{aligned}
$$

Construa a matriz L_e, cujas colunas são os vetores $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$
L_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

Se $x \in \mathbb{R}^n$, então $L(x) = L_e \cdot x$.

Transformações Lineares: Representação matricial

Se $x \in \mathbb{R}^n$, então $L(x) = L_e \cdot x$.

Prova:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$L(x) = L\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i L(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

$$L_e \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni} x_i \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = L(x)$$

Transformações Lineares: Representação matricial

Se $x \in \mathbb{R}^n$, então $L(x) = L_e \cdot x$.

Consequência: O espaço das transformações lineares em $\mathbb{R}^n$ e o conjunto das matrizes de ordem n estão em correspondência biunívoca.

A composição de transformações lineares corresponde ao produto de matrizes, e a soma de transformações lineares corresponde à soma de matrizes.

Manipular matrizes é fácil no computador!

Transformações ortogonais

Produto interno em $\mathbb{R}^n$:

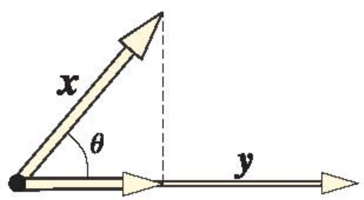
$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

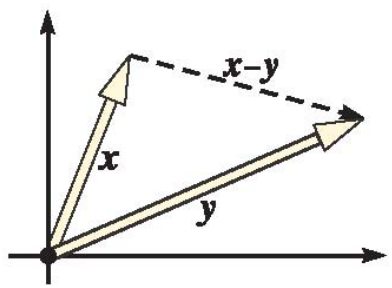
Usamos o produto interno para medir distância e ângulos:

Comprimento de vetor: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

Ângulo entre dois vetores não nulos u e v: $\cos\theta = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$

Distância entre dois pontos x e y: $d(x, y) = \|x - y\|$





Transformações ortogonais

Uma transformação que preserva o produto interno é chamada transformação ortogonal:

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Vamos calcular o ângulo entre $T(u)$ e $T(v)$:

$$\cos\theta_T = \frac{\langle T(u), T(v) \rangle}{\|T(u)\| \cdot \|T(v)\|} = \frac{\langle u, v \rangle}{\sqrt{\langle T(u), T(u) \rangle} \cdot \sqrt{\langle T(v), T(v) \rangle}}$$

$$= \frac{\langle u, v \rangle}{\sqrt{\langle u, u \rangle} \cdot \sqrt{\langle v, v \rangle}} = \cos\theta$$

Logo, transformações ortogonais preservam ângulos!

Transformações ortogonais

Além disso:

$$\|T(u)\| = \langle T(u), T(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|$$

Logo, transformações ortogonais preservam distância!

Exemplos

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Isometrias

Transformações que preservam distância são chamadas isometrias.

Dois objetos $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ são ditos congruentes se existe uma isometria $T\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ tal que $T(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_2$.

Alternativamente, uma transformação é uma isometria sse $T(u) = L(u) + v_0$, onde T é uma transformação linear ortogonal e v_0 é um vetor fixo.

T não é linear!

Geometria afim

Como representar movimentos rígidos (isometrias)?

Qual a diferença entre ponto e vetor?

Solução: duas cópias do $\mathbb{R}^n$, uma para vetores e uma para pontos.

Como somar ponto com ponto, ponto com vetor, vetor com vetor...?

Geometria afim

Espaço afim: Par $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$, onde $\mathcal{P}$ é o espaço de pontos e $\mathcal{V}$ é o espaço de vetores, e $\mathcal{P} = \mathcal{V} = \mathbb{R}^n$.

Sendo $\mathcal{V}$ um espaço vetorial, temos as combinações lineares

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u_i} \in \mathcal{V}, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

e transformações lineares

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(\vec{u_i})$$

Geometria afim

Soma ponto-vetor:

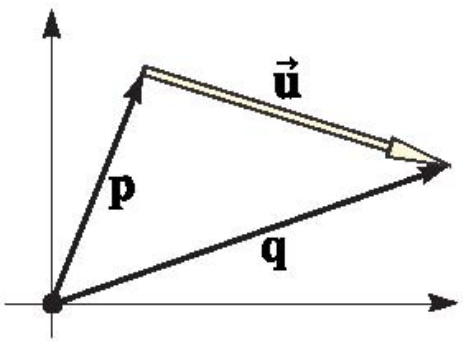
$$p + \vec{u} = q \in \mathcal{P}$$

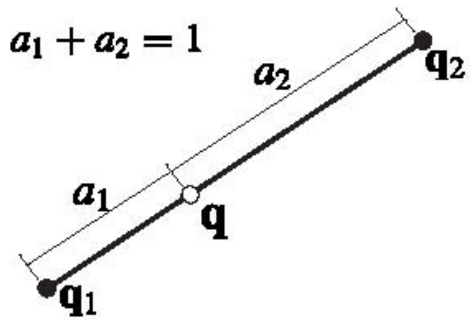
Subtração ponto-ponto:

$$q - p = \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad q = p + \vec{u}$$

Generalização (combinação linear de pontos):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i p_i \in \mathcal{V} \quad \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = 0.$$





Geometria afim

Interpolação de pontos:

$$q = (1-\alpha)q_1 + \alpha q_2 = q_1 + \alpha(q_2 - q_1), \quad \alpha \in [0,1].$$

Alternativamente:

$$q = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2, \quad \text{com } \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1], \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Generalização (combinação afim de pontos):

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

Exemplo: equação paramétrica da reta

$$r(t) = a + t(b-a) = (1-t)a + b, \quad t \in \mathbb{R}$$

Combinação afim de pontos, portanto o resultado é um ponto.

Geometria afim

Resumo:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u_i} \in \mathcal{V}, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i p_i \in \mathcal{V} \quad \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

Transformações afins

Uma transformação $T : \mathcal{A}_1 \mapsto \mathcal{A}_2$ entre dois espaços afins $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{V}_1)$ e $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{P}_2, \mathcal{V}_2)$ é chamada de transformação afim sse:

1. T preserva vetores, e além disso a restrição $T|\mathcal{V} \colon \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$ é linear;
2. T preserva pontos, e além disso $T(p + \vec{v}) = T(p) + T(\vec{v})$.
2. (Alternativa) T preserva combinação afim de pontos:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \quad \Longrightarrow \quad T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i p_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(p_i)$$

Uma transformação afim preserva retas.

Seja $r(t) = (1 - t)a + tb$. Então:

$$T(r(t)) = T((1-t)a + tb) = T((1-t)a) + T(tb) = (1-t)T(a) + tT(b),$$

ou seja, a imagem da reta $r(t)$ que passa pelos pontos a e b é a reta que passa pelos pontos $T(a)$ e $T(b)$.

Transformações afins

Translação: $T(p) = p + v_0$ é uma transformação afim.

Para provar, precisamos mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \quad \Longrightarrow \quad T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i p_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(p_i)$$

Considere uma combinação afim $t_1 u + t_2 v$ de pontos, $t_1 + t_2 = 1$, temos

$$\begin{aligned} T(t_1 u + t_2 v) &= t_1 u + t_2 v + v_0 \\ &= t_1 u + t_2 v + (t_1 + t_2) v_0 \\ &= t_1 (u + v_0) + t_2 (v + v_0) \\ &= t_1 T(u) + t_2 T(v) \end{aligned}$$

Afim vs. Linear

Seja $T(x) = L(x) + \vec{v}_0, \quad$ onde L é linear.

É fácil mostrar que T é afim (similar ao slide anterior).

Por outro lado, considere T uma transformação afim qualquer.

Seja $T(0) = p_0$.

Seja $\vec{x}$ um vetor qualquer. $$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= T(0 + \vec{x}) \\ &= T(0) + T(\vec{x}) \\ &= p_0 + T(\vec{x}) \end{aligned}$$

1. T aplicado a $\vec{x}$ é linear, por definição.
2. p_0 é constante, portanto funciona como uma translação.

Logo, toda transformação afim é a soma de um ponto com uma transformação linear: $T(x) = L(x) + p_0$.

Afim vs. Linear

Logo, toda transformação afim é a soma de um ponto com uma transformação linear: $T(x) = L(x) + p_0$.

Os movimentos rígidos são transformações afins.

Coordenadas afins

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim, o um ponto do espaço, e $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ uma base de $\mathcal{A}$.

A lista $\mathcal{F} = (o, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ é chamada referencial de $\mathcal{A}$.

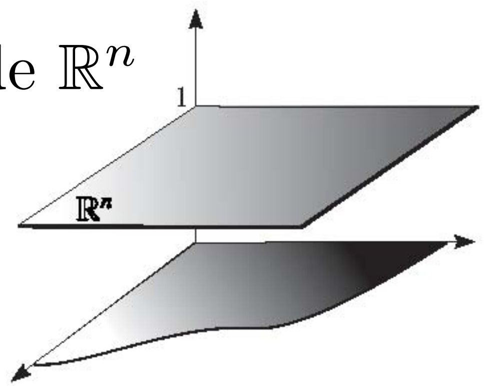
Seja $p = o + \vec{v} \in \mathcal{A}$.

Podemos escrever $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n$.

Daí $\vec{p} = o + c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n$.

Os $n+1$ escalares $1, c_1, c_2, \ldots, c_n$ representam as coordenadas de p no referencial e são representados pela lista $(c_1, c_2, \ldots, c_n, 1)$.

Geometricamente, estamos colocando uma cópia de $\mathbb{R}^n$ no hiperplano $z_{n+1} = 1$ do $\mathbb{R}^{n+1}$.



Representação matricial das transformações afins

Considere dois referenciais

$F = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n, o)$ e $G = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, o')$.

$x = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_n\vec{u}_n + o$ um ponto no espaço afim;

Seja T uma transformação afim, e suponha que:

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i, \quad T(o) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,n+1}\, v_i.$$

Daí

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_j \vec{u}_j + o \quad \Longrightarrow \quad T(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(\vec{u}_j) + T(o)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a_{i\,n+1} \right) v_i$$

Representação matricial das transformações afins

De forma matricial, no referencial G, temos:

parte linear translação

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a_{i\,n+1} \right) v_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1\,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2\,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n\,n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uma transformação afim pode ser representada por uma matriz de ordem n+1.

$$T(x) = L(x) + p_0$$

Paralelismo das transformação afim

Considere duas retas

$r(t) = a + t(b - a)$, passando por a e b.

$s(t) = c + t(d - c)$, passando por c e d, paralela a r, ou seja:

$$b - a = \lambda(d - c)$$

Seja T transformação afim. Então:

$$\begin{aligned} T(r(t)) = T(a + t(b - a)) &= T(a) + tT(b - a) \\ &= T(a) + \lambda t T(d - c) \end{aligned}$$

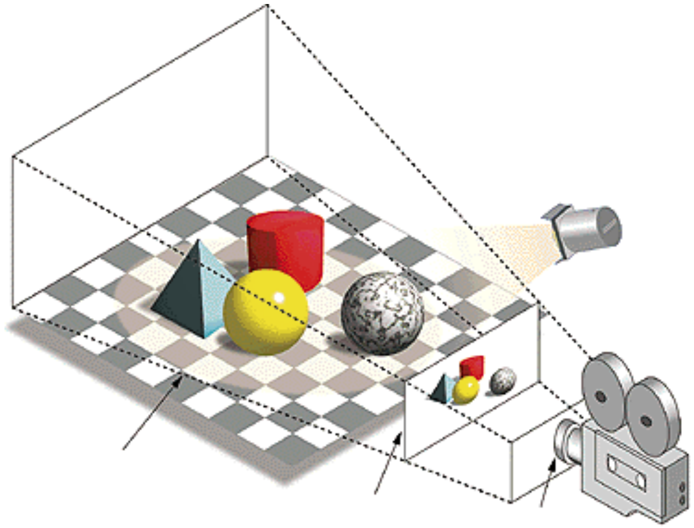
Por outro lado:

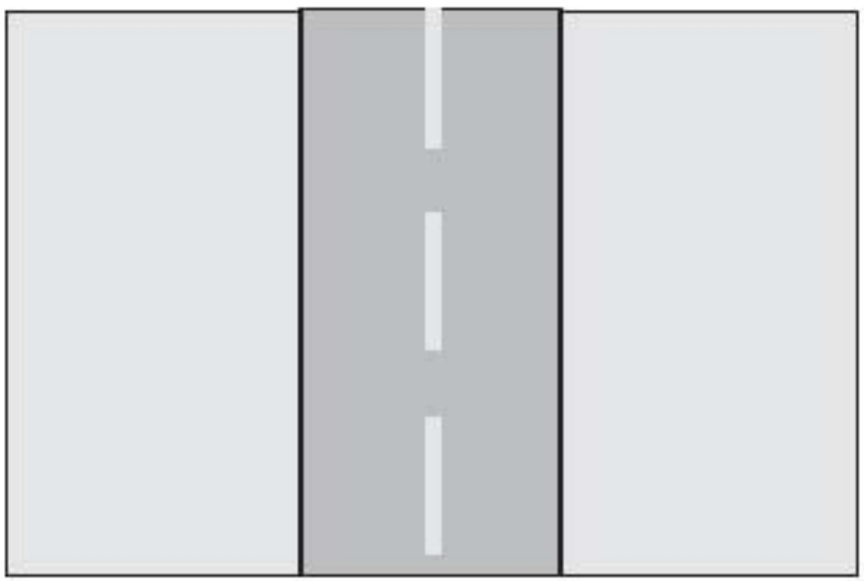
$$T(s(t)) = T(c + t(d - c)) = T(c) + tT(d - c)$$

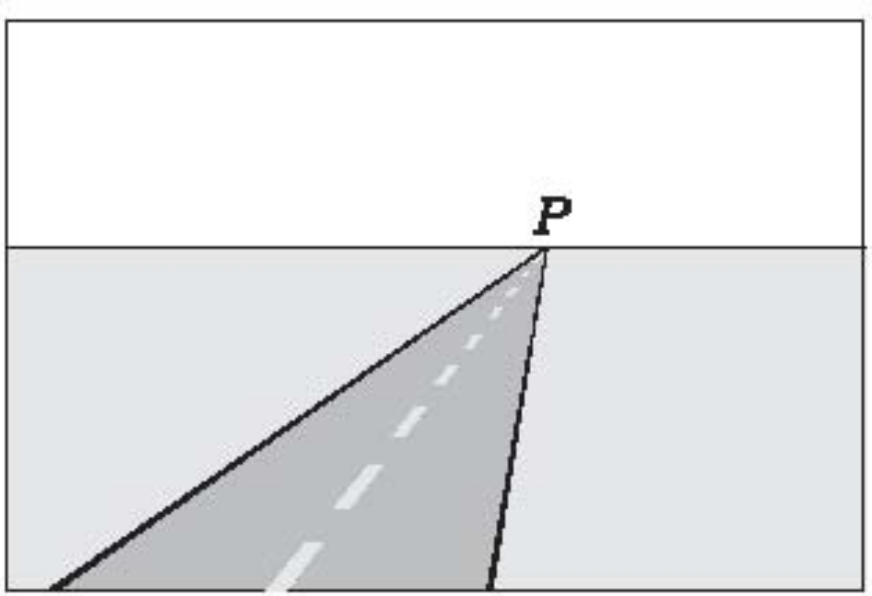
Logo, $T(r(t)) \parallel T(s(t)$.

Paralelismo das transformação afim

Mas para realizar projeções em Computação Gráfica, não queremos manter paralelismo!







Espaço Projetivo

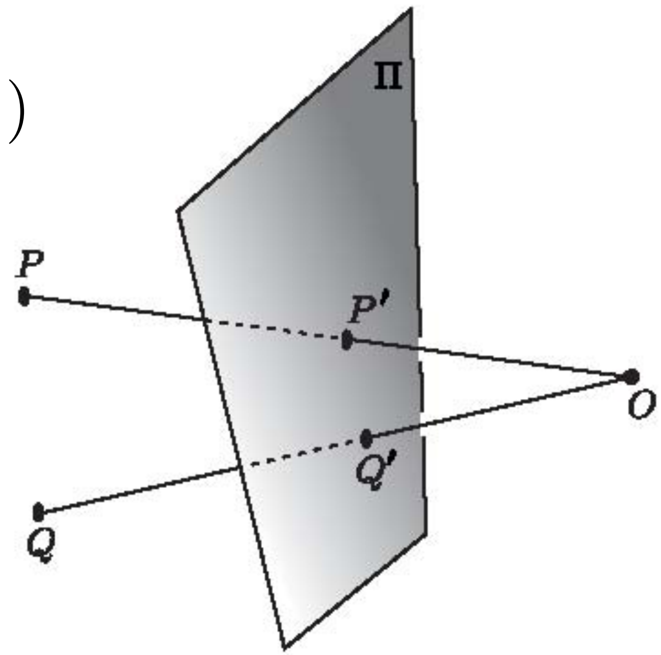
Seja $O \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um hiperplano, onde $O \notin \Pi$.

A projeção cônica de $P \in \mathbb{R}^{n+1}, P \neq O$ em Π
é o ponto P' onde a reta r definida por OP intersecta Π.

Obs.: todos os pontos de r serão projetados em P'. Logo, r será considerado um ponto projetivo.

O conjunto de retas passando pela origem O de $\mathbb{R}^{n+1}$ é chamado espaço projetivo, indicado por $\mathbb{RP}^n$.

Representaremos o ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$
como $(\mathbf{x}, x_{n+1}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.



Partição dos pontos do Espaço Projetivo

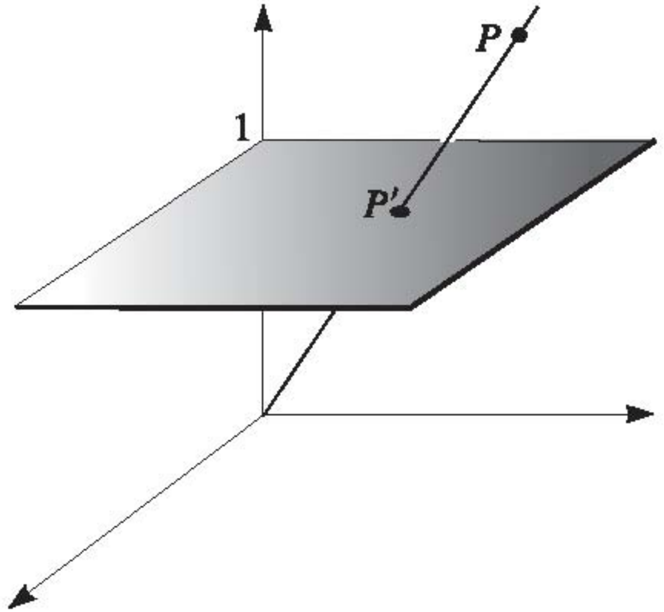
$$\mathbb{RP}^n = \{(\mathbf{x}, 1) \cup (\mathbf{x}, 0)\}, \quad \mathbf{x} \neq O.$$

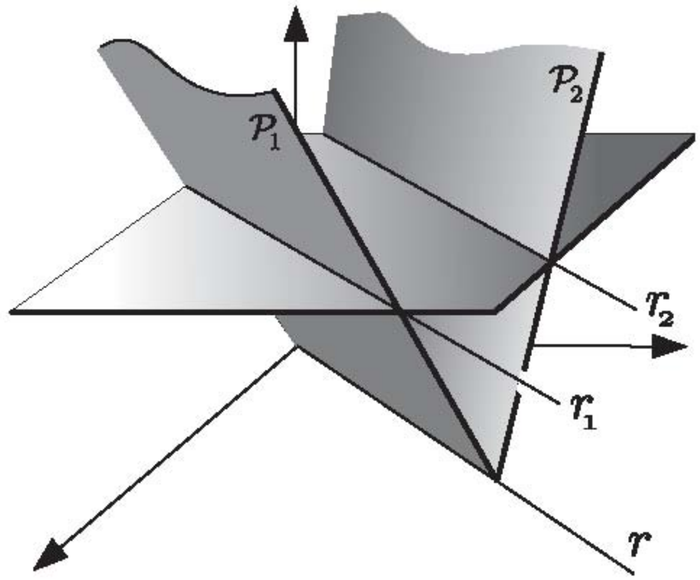
$(\mathbf{x}, 1)$: plano $z = 1$, chamados pontos afins do plano projetivo.

$(\mathbf{x}, 0)$: pontos ideais ou pontos do infinito.

Uma reta no espaço projetivo define um plano pela origem no espaço euclidiano.

Duas retas no plano afim se encontram num ponto do infinito.





Coordenadas Homogêneas

Dado $p \in \mathbb{RP}^n$, podemos tomar $p' \in \mathbb{R}^{n+1}$ na reta r que representa p.

Se $p' = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$, então

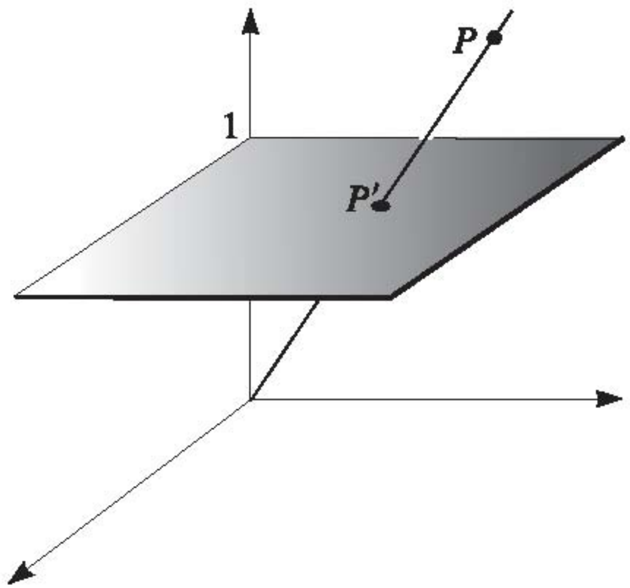
$\lambda p' = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}), \quad \lambda \neq 0$ também representa p.

Essas coordenadas projetivas são chamadas coordenadas homogêneas.

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}] = \lambda\,[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}], \quad \lambda \neq 0.$$

Normalmente, tratamos cada um destes pontos normalizando a última coordenada:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}] = \left[\frac{x_1}{x_{n+1}}, \frac{x_2}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1\right]$$



Transformações projetivas

Devem transformar pontos de $\mathbb{RP}^n$ em pontos de $\mathbb{RP}^n$.

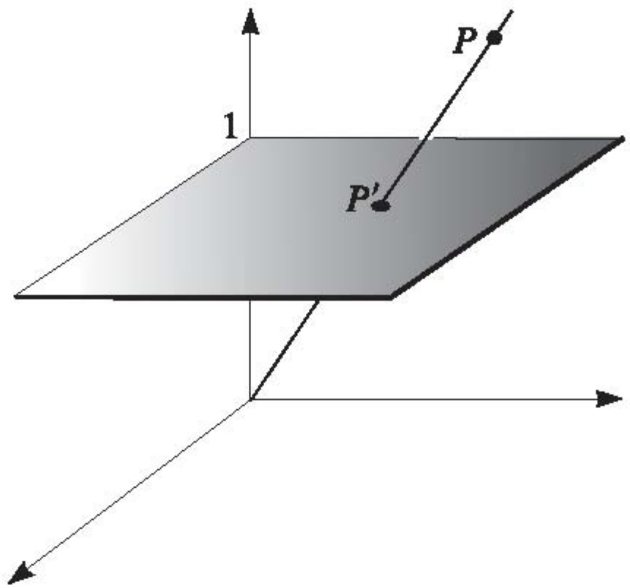
Do ponto de vista euclidiano, devem transformar retas pela origem, em retas pela origem.

Logo, trata-se de uma transformação linear invertível $T\colon \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$.

Pode ser representada por uma matriz de ordem $n+1$.

T é definida a menos de um escalar não nulo:

$$(\lambda T)P = T(\lambda P) = T(P)$$



Anatomia das transformações projetivas

Seja $T\colon \mathbb{RP}^2 \mapsto \mathbb{RP}^2$ dada pela transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$.

Seja T pode ser representada por uma matriz invertível de ordem 3.

$$M = \begin{pmatrix} a & d & g & | & t_1 \\ b & e & h & | & t_2 \\ c & f & i & | & t_3 \\ & - & - & - & - \\ p_1 & p_2 & p_3 & | & s \end{pmatrix}$$

onde $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} s \end{pmatrix}$