Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Matemática

Coordenadas

Prof. Thales Vieira

2014

Coordenadas

Geometria → Coordenadas → Representação

Transformar objetos ou seus sistemas de coordenadas?

Transformação de objetos

Movimento rígido: Rotação seguida de Translação

1. Rotação R de um ângulo θ em torno da origem;

2. Translação T pelo vetor (t_1, t_2).

Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$TR(x) = T(R(x))$$

Matricialmente:

$$R = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

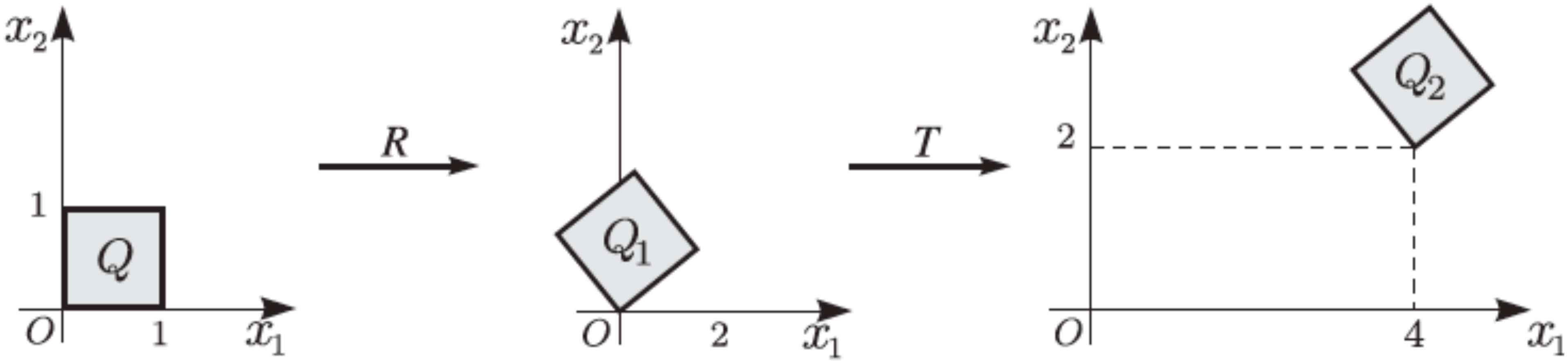
$$T \cdot R = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & t_1 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformação de objetos

Movimento rígido: Rotação seguida de Translação

$$T \cdot R = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & t_1 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo: Rotação de $\frac{\pi}{4}$ seguida de translação de (4,2).



Transformação de objetos

Rotação em torno de um ponto

Como girar um objeto em torno de um ponto arbitrário?

Idéia:

1. Translade o ponto para origem;
2. Aplique rotação em torno da origem;
3. Translade o resultado de volta.

Seja P = (p_1, p_2). Sua translação para origem e a volta (inversa) é dada por:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_1 \\ 0 & 1 & -p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1^{-1} \cdot R \cdot T_1 = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & p_1(1 - cos(\theta)) + p_2 sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) & p_2(1 - cos(\theta)) - p_1 sen(\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformação de referenciais

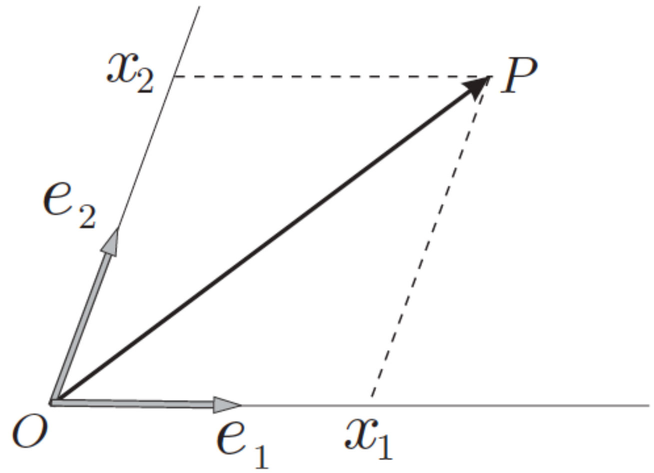
Referencial no plano:

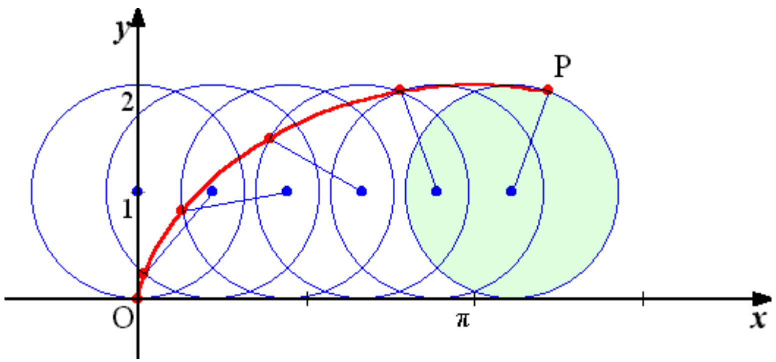
Ponto O e base $\{e_1, e_2\}$.

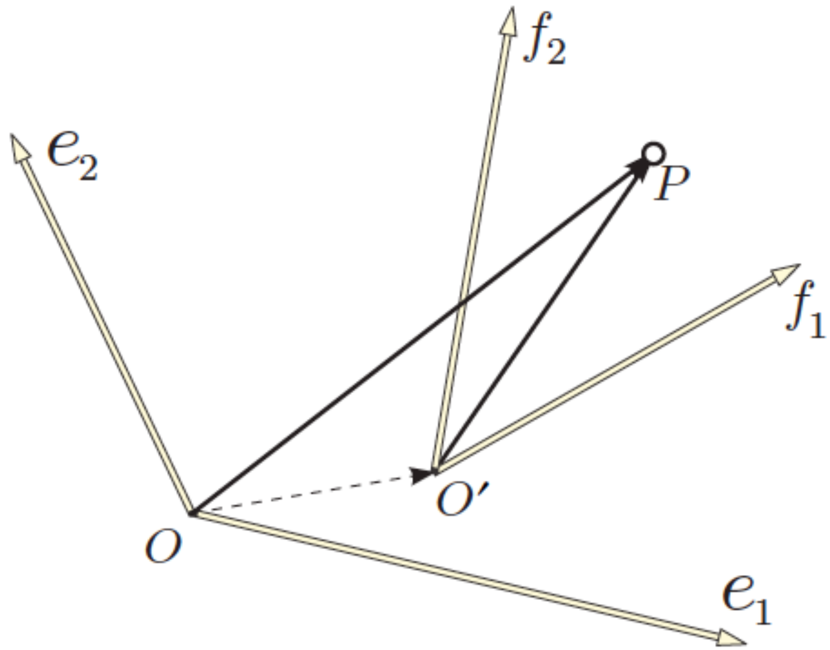
Dado $P \in \mathbb{R}^2$, temos que:

$$\vec{OP} = x_1 e_2 + x_2 e_2$$

Logo, podemos identificar P pelas coordenadas (x_1, x_2).







Transformação de referenciais

Sejam os referenciais

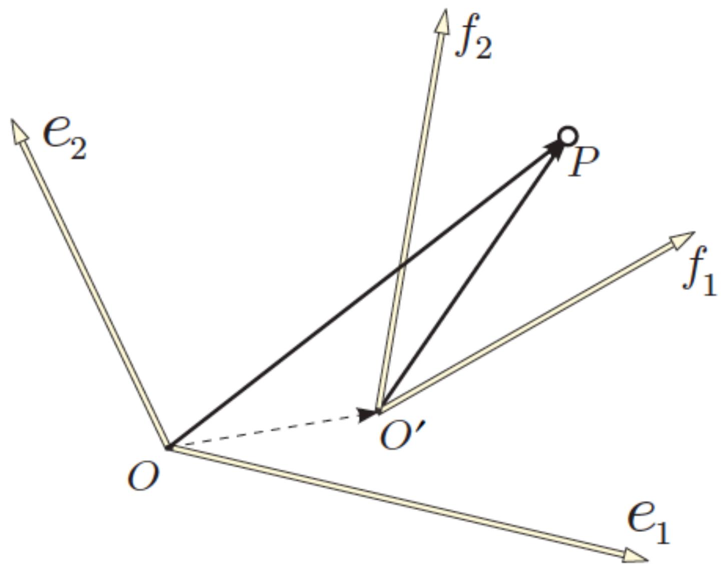
$$\mathcal{E} = (O, e_1, e_2)$$
$$\mathcal{F} = (O', f_1, f_2)$$

Para levar o referencial $\mathcal{E}$ em $\mathcal{F}$ procedemos da seguinte maneira:

1. Determinamos a transformação linear L que leva a base $\{e_1, e_2\}$ em $\{f_1, f_2\}$.

2. Determinamos a translação que leva O em O'.

$$A = T \cdot L$$



Transformação de referenciais

Seja $OO' = t_1 e_1 + t_2 e_2$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se
$$f_1 = L(e_1) = a_{11} e_1 + a_{21} e_2$$
$$f_2 = L(e_2) = a_{12} e_1 + a_{22} e_2$$

então

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

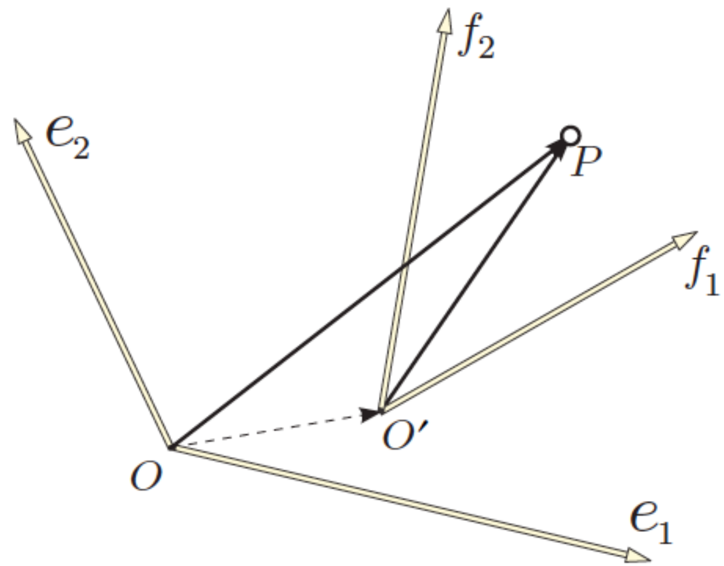
onde L é a matriz de mudança de base. Logo

$$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = T \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ é chamada matriz de passagem do referencial $\mathcal{E}$ em $\mathcal{F}$

Transformação de coordenadas

Como a matriz de passagem $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ relaciona as coordenadas no sistema do referencial $\mathcal{E}$ e do referencial $\mathcal{F}$?



Seja P = (y_1, y_2)

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$$

$$\vec{OP} = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

$$\vec{O'P} = y_1 f_1 + y_2 f_2$$

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = t_1 e_1 + t_2 e_2 + y_1 f_1 + y_2 f_2$$

Mas $f_1 = L(e_1) = a_{11} e_1 + a_{21} e_2$

$$f_2 = L(e_2) = a_{12} e_1 + a_{22} e_2$$

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = t_1 e_1 + t_2 e_2 + y_1(a_{11} e_1 + a_{21} e_2) + y_2(a_{12} e_1 + a_{22} e_2)$$

$$x_1 = t_1 + y1 a_{11} + y_2 a_{12}$$

$$x_2 = t_2 + y1 a_{21} + y_2 a_{22}$$

➔

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformação de coordenadas

$$x_1 = t_1 + y1a_{11} + y_2a_{12}$$
$$x_2 = t_2 + y1a_{21} + y_2a_{22}$$

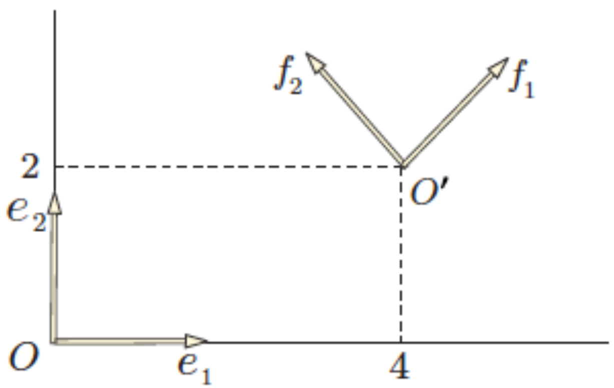
➔

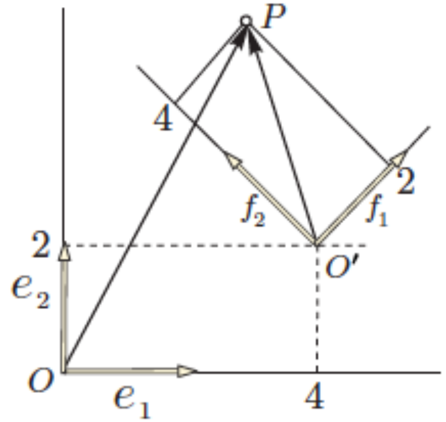
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

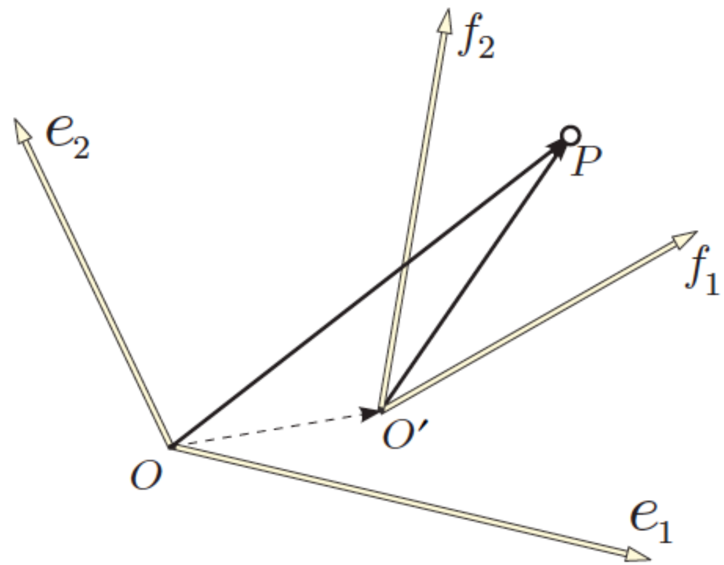
$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$!

$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ muda as coordenadas de um ponto no sistema $\mathcal{F}$ para as coordenadas no sistema $\mathcal{E}$.

Exemplo…







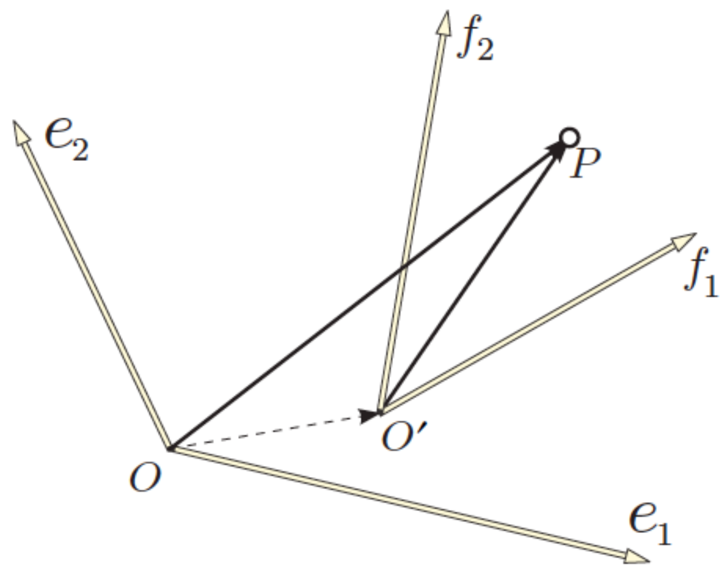
Transformação de coordenadas

Transformação inversa:

A transformação que muda do referencial $\mathcal{F}$ para o referencial $\mathcal{E}$ é dada pela inversa:

$$A_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \left(A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right)^{-1}$$

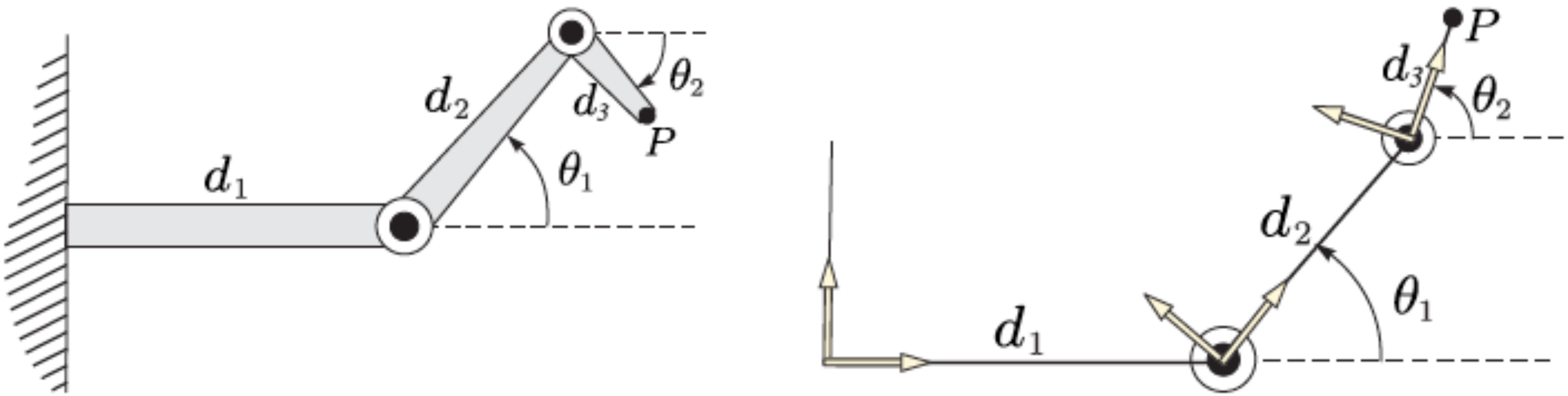
$A_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$ muda as coordenadas de um ponto no sistema $\mathcal{E}$ para as coordenadas no sistema $\mathcal{F}$.



Sistemas de coordenadas locais e globais

- Sistemas de coordenadas do mundo (globais)
- Sistemas de cooordenadas do objeto (locais)

Como calcular as coordenadas de P no sistema de coordenadas global com origem no encontro do antebraço com a parede e alinhado com a parede e o antebraço?



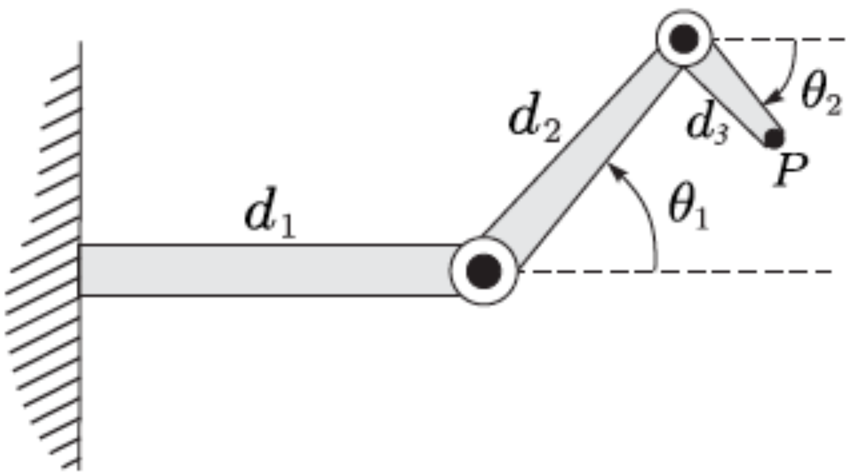
Sistemas de coordenadas locais e globais

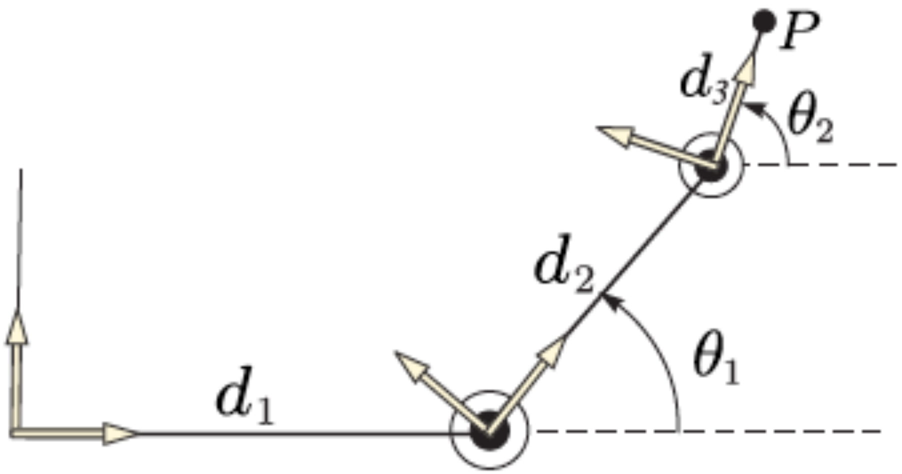
Considere os referenciais $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2$, e suponha que conhecemos $A_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2}$ e $A_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}$.

Como obter $A_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_3}$?

$$A_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_3} = A_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} {\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}$$

$A_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_3}$ muda as coordenadas de um ponto no sistema $A_{\mathcal{E}_3}$ para as coordenadas no sistema $A_{\mathcal{E}_1}$.





Rotações 3d

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

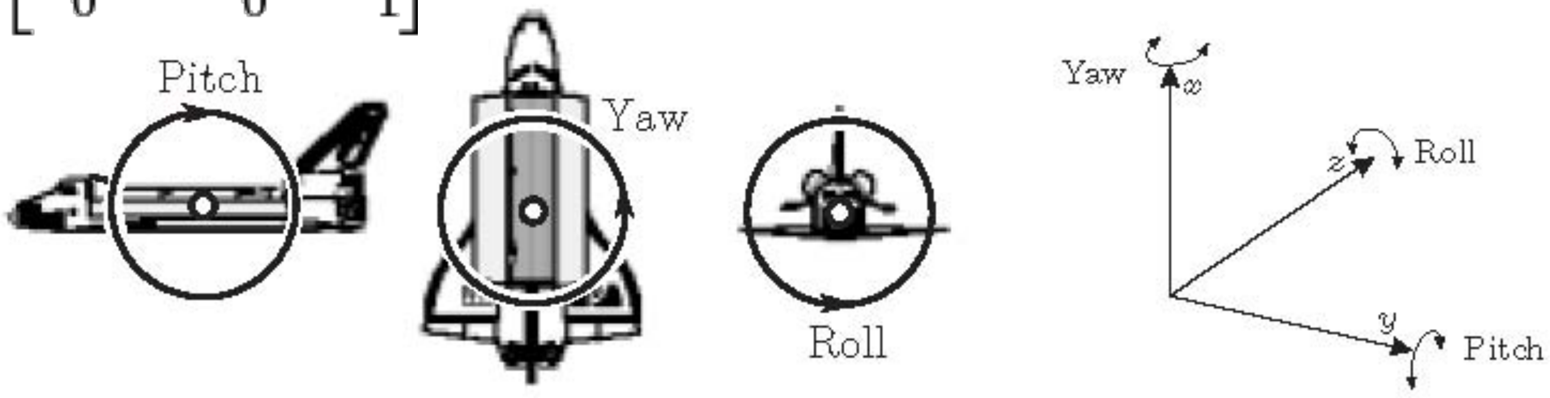
Rotações Gerais 3d: yaw, pitch, roll

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R = R_x(\gamma)\, R_y(\beta)\, R_z(\alpha)$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(a) (b)

Rotação 3d ao redor de um eixo qualquer

Seja (u_x, u_y, u_z) um vetor unitário representando o eixo de rotação.

Seja θ o ângulo de rotação. A matriz de rotação 3d neste caso é dada por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta + u_x^2 (1-\cos\theta) & u_x u_y (1-\cos\theta) - u_z \sin\theta & u_x u_z (1-\cos\theta) + u_y \sin\theta \\ u_y u_x (1-\cos\theta) + u_z \sin\theta & \cos\theta + u_y^2 (1-\cos\theta) & u_y u_z (1-\cos\theta) - u_x \sin\theta \\ u_z u_x (1-\cos\theta) - u_y \sin\theta & u_z u_y (1-\cos\theta) + u_x \sin\theta & \cos\theta + u_z^2 (1-\cos\theta) \end{bmatrix}.$$

Site

http://www.im.ufal.br/professor/thales/icg.html