

Simplificação de malhas triangulares baseada no diagrama de Voronoi intrínseco*

Douglas Cedrim Adelailson Peixoto Thales Vieira Dimas Martínez
Instituto de Matemática
Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Maceió, Brasil
cedrim@gmail.com, {adelailson, thales, dimas}@mat.ufal.br

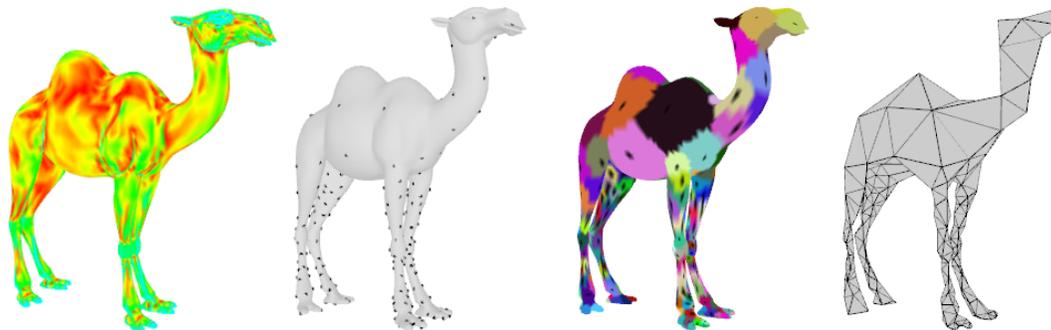


Figura 1. Etapas do método de simplificação: Cálculo da curvatura gaussiana, seleção de pontos baseada na curvatura, diagrama de Voronoi intrínseco e malha simplificada, respectivamente.

Resumo—Neste trabalho, efetuamos uma adaptação, para superfícies triangulares, de um método de simplificação baseado em uma cobertura de Voronoi. Além disso, utilizamos o método *Fast Marching* como métrica e diferentes estratégias para seleção de vértices da malha simplificada. A simplificação ocorre a partir de um diagrama de Voronoi intrínseco à malha. Estudamos algumas condições necessárias para que, a partir do dual desse diagrama, seja obtida uma malha sem singularidades e que seja equivalente à malha original.

Palavras-chave - Diagrama de Voronoi intrínseco; simplificação de malhas; subamostragem de malhas;

Abstract — In this work, we have made an adaptation, for triangular meshes, of a mesh simplification process based on Voronoi coverage. Moreover, we use *Fast Marching Method* as a distance function over the mesh and some different strategies for simplified mesh vertices selection. The simplification process is done by constructing an intrinsic Voronoi diagram over the original mesh. We study some necessary conditions to obtain a mesh, as Voronoi dual, without any singularities and topologically equivalent to the original mesh.

Keywords - intrinsic Voronoi diagram; mesh simplification; mesh coarsening; mesh subsampling

I. INTRODUÇÃO

Na atualidade, os modelos digitais tridimensionais são cada vez mais comuns. Novas técnicas para digitalizar objetos, incluindo: Tomografia Computarizada e Ressonância Magnética,

* Dissertação de Mestrado apresentada em 24 de fevereiro de 2011, no Instituto de Matemática da UFAL.

nos fornecem modelos com grande quantidade de vértices. Em determinadas ocasiões, esta informação é muito mais do que precisamos, a exemplo de quando desejamos desenhar o modelo em uma pequena região da tela. Outro contexto está ligado à transmissão de uma malha em um meio digital (rede), que pode ser um processo bastante custoso, dependendo da quantidade de informação. Em ambos os casos, pode-se efetuar uma simplificação da malha e eventualmente uma nova reconstrução. Produto da estrutura física dos *scanners*, os modelos triangulados podem ser de qualidade muito pobre, sendo necessário efetuar um remalhamento, que pode ser feito através da geração de uma malha base de boa qualidade, que será posteriormente refinada.

A. Trabalhos relacionados

Em geral, algoritmos de simplificação de malhas que procuram satisfazer certas condições, tais como: a preservação ou não da topologia; a manutenção de vértices da malha original ou remalhamento; erro geométrico ou no espaço de atributos como critério de parada; estáticos ou incrementais; adaptatividade ao observador. Podem também ser agrupados pela técnica que usam: junção de faces [1]; decimação: [2]–[4]; otimização de energia [5], [6] e agrupamento de vértices [7], [8]. Uma classificação mais detalhada pode ser encontrada em Heckbert et al. [9] e Cignoni et al. [10].

II. DESCRIÇÃO GERAL DO MÉTODO

Este trabalho propõe uma adaptação, para malhas de triângulos, de um método de simplificação determinístico, baseado em agrupamento de vértices [11], que, em contraste com agrupamentos espaciais, é intrínseco à malha. A equivalência topológica entre as malhas é controlada através da propriedade da bola fechada (*closed-ball property*) [12], [13]. Além disso, os vértices da malha simplificada são obtidos como um subconjunto de vértices da malha original. O processo é estático e independe do observador.

A simplificação é dividida em três etapas:

- *Seleção*: É definido um subconjunto de vértices da malha original para serem vértices da malha simplificada, utilizando estratégias de geração de uma cobertura de discos sobre a malha;
- *Diagrama de Voronoi intrínseco*: Uma vez definidos os pontos e a cobertura de discos, é gerado uma subdivisão da malha original em células de Voronoi;
- *Triangulação*: Na etapa final do processo é efetuada a geração da malha simplificada através do dual ao diagrama de Voronoi intrínseco definido sobre a malha.

Nesta seção, detalhamos os conceitos básicos do método de simplificação [11].

A. Seleção de vértices

Definição 1 (Disco na malha). *Seja V o conjunto de vértices $\{v\}$ da malha. Um disco na malha $D_\delta(v)$ de centro em v e raio máximo δ , é definido como o conjunto $\{w_i\} \subset V$ tais que*

$$\|w_i - v\|_{\hat{M}} < \delta,$$

onde $\|\cdot\|_{\hat{M}}$ é uma métrica \hat{M} definida na malha.

Definição 2 (Cobertura da malha por discos). *Seja V o conjunto de vértices de uma malha M e $CD = \{D_\delta(v) : \text{com } v \in V \text{ e } \delta \in \mathbb{R}\}$ uma coleção de discos na malha. Dizemos que CD é uma cobertura de M por discos se satisfaz a seguinte condição:*

$$V \subset \bigcup_{D_\delta(v) \in CD} D_\delta(v). \quad (1)$$

A etapa inicial consiste em determinar um subconjunto de vértices $V_0 \subset V$ da malha original. Para isso, é criada uma cobertura de discos CD sobre a malha. Como visto na expressão (1), todo vértice da malha original pertence a pelo menos um disco. Cada disco o centro c_i é utilizado como vértice representante, que pertencerá apenas àquele disco e $V_0 = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$. Assim, escolher os vértices da malha simplificada corresponde a determinar um critério de geração da cobertura.

Vale observar também que esse processo interfere diretamente tanto na geometria quanto na topologia da malha resultante, uma vez que a densidade da amostragem é determinada pelo raio de cada disco na cobertura.

1) *Seleção incremental*: A estratégia tradicional para a geração da cobertura consiste em obter o conjunto V_0 de forma *incremental* [11], ou seja, é construída uma fila de vértices baseada na ordem de leitura da malha.

O primeiro vértice v_0 é utilizado como centro do primeiro disco $D_\delta(v_0)$ e adicionado à cobertura. A partir daí, são retirados vértices da fila até que algum v_i não esteja presente na cobertura, sendo então utilizado como centro do segundo disco $D_\delta(v_i)$ da cobertura. O algoritmo procede até que todos da fila tenham sido processados, fazendo com que todos os vértices da malha original pertençam a pelo menos um disco.

Esse critério é mais simples de implementar, porém acaba sendo muito simplificado pois não leva em consideração características inerentes à malha original. Além disso, para cada ordenação de armazenamento dos vértices da malha original, a simplificação gera uma malha diferente.

B. Diagrama de Voronoi intrínseco

O diagrama de Voronoi de um conjunto de pontos P no \mathbb{R}^2 é a divisão do plano em regiões, onde para cada ponto $p \in P$, chamado de sítio, cada região contém uma parte do plano que é a mais próxima desse sítio do que qualquer outro. A partir disso, define-se o *diagrama de Voronoi intrínseco* como uma extensão do diagrama para malhas de triângulos utilizando uma métrica sobre a malha [13].

III. ADAPTAÇÃO DO MÉTODO

A seguir, serão examinados alguns critérios que foram utilizados neste trabalho para gerar a cobertura de discos.

A. Estratégias para seleção de vértices

1) *Ponto mais distante*: Escolhemos um vértice inicial qualquer v_0 como o centro do primeiro disco $D_\delta(v_0)$ e a partir daí, o algoritmo procede escolhendo o centro do próximo disco como sendo o *ponto mais distante* a toda a cobertura atual, ou seja, para cada disco que fora criado e adicionado à cobertura CD , toma-se um vértice u de forma que este seja o mais distante, na malha, dos centros dos discos da cobertura CD

$$u = \arg \max_w \left\{ d \left(w, \bigcup_{D \in CD} D \right), w \in V \setminus CD \right\}$$

Note que a função de distância d aqui utilizada pode representar diferentes métricas, e que o conceito de ponto mais distante vem da ideia de excentricidade de um vértice no grafo. A ideia de utilizar essa abordagem é tentar reduzir a quantidade de pontos necessários para definir a cobertura de discos.

2) *Curvatura gaussiana*: Ambos os métodos descritos não levam em consideração a geometria da malha como critério para a criação da cobertura. Uma extensão natural consiste em utilizar atributos intrínsecos à superfície e sua representação para obter uma melhor aproximação da malha original na malha simplificada.

Dada uma representação da superfície por uma malha de triângulos, que pode ser vista como sua aproximação linear

por partes, as estimativas de operadores diferenciais precisam ser adaptadas para uma versão discreta.

Como pode ser visto em [14], para garantir uma boa discretização da curvatura gaussiana, utilizam-se médias locais em torno de cada vértice. Assim, a curvatura gaussiana pode ser definida como:

$$\kappa(v) = \frac{1}{A_{mixed}} \left(2\pi - \sum_{i \in N_1(v)} \theta_i \right)$$

onde θ_i o ângulo em v do i -ésimo triângulo da 1-vizinhança de v e A_{mixed} é uma generalização da área de Voronoi para triângulos obtusos, que constitui um bom controle numérico de erro.

B. Cálculo da distância

Na abordagem original, utiliza-se o algoritmo de Dijkstra para definir uma função distância sobre a superfície. Diferentemente de Dijkstra, o método *Fast Marching* é construído como uma discretização do cálculo de distâncias geodésicas em uma superfície contínua [15].

Neste trabalho, utilizamos uma adaptação para malhas triangulares do método *Fast marching* que utiliza a ideia de avanço de frentes sobre a malha [16]. Seu algoritmo define uma aproximação numérica da distância através da solução da equação Eikonal:

$$\|\nabla T\| = F \text{ com } T(v) = 0,$$

onde F controla a velocidade do avanço e v é o ponto inicial.

A idéia do algoritmo é a de uma onda propagando-se na direção do seu gradiente ao longo de uma região com uma determinada velocidade constante, onde define-se a distância de um ponto qualquer da região como o tempo T em que a onda leva para atingí-lo. Assim, utilizamos $F \equiv 1$, o que leva a função distância a um ponto ser monótona crescente.

C. Boa formação do diagrama de Voronoi

A posição e a quantidade de células de Voronoi criadas podem constituir problemas para a geração da malha simplificada [11], [17]. Na figura 2, mostramos um exemplo de uma cobertura de Voronoi não adequada, o que faz com que a malha dual tenha arestas e vértices singulares.

Para que o dual da cobertura de Voronoi constitua uma variedade discreta regular e seja topologicamente equivalente à malha original, é necessário que o diagrama de Voronoi não viole a *propriedade da bola fechada* [12], enunciada a seguir:

Proposição 1. *Seja uma cobertura finita de células de Voronoi $(C_i)_{i=1..k}$. Essa cobertura satisfaz a propriedade da bola fechada se valem as seguintes condições:*

- 1) C_i é um 2-disco, ou seja, é equivalente a um disco topológico,
- 2) A intersecção não vazia entre $C_i \cap C_j$, $i \neq j$ é uma única curva simples,
- 3) A intersecção não vazia entre $C_i \cap C_j \cap C_k$, $i \neq j \neq k$ é um ponto.

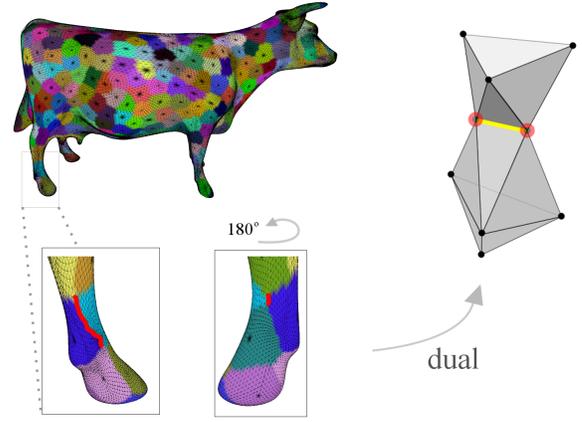


Figura 2. Triangulação dual degenerada.

Prova: A demonstração da proposição pode ser encontrada em [12]. \square

Definição 3 (Boa formação do diagrama de Voronoi). *Um diagrama de Voronoi intrínseco (ou restrito) é dito bem formado se não viola a propriedade da bola fechada.*

Antes de descrever como cada condição é avaliada, é importante lembrar a característica de Euler de uma triangulação. Trata-se de um invariante topológico, ou seja, depende apenas da topologia e não da quantidade de elementos da malha. A *característica de Euler* χ de uma triangulação S é dada pela expressão

$$\chi(S) := v - a + f, \quad (2)$$

onde v é o número vértices, a de arestas e f de faces.

1) *Primeira condição da bola fechada:* Uma forma direta de avaliar a primeira condição é utilizando a característica de Euler de uma célula de Voronoi C , que será homeomorfa a um disco (2-bola) se for uma variedade discreta, conexa e $\chi(C) = 1$. Aqui é utilizado o fato da malha original constituir uma triangulação de cada célula para facilitar os cálculos de $\chi(C)$. Na Figura 3, é exibido um disco de raio R que viola a primeira condição

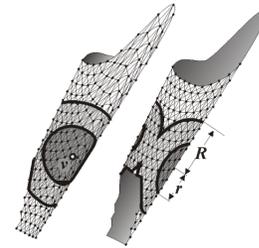


Figura 3. Violação da primeira condição. Figura extraída de [11].

2) *Segunda condição da bola fechada:* A intersecção não vazia entre duas células de Voronoi é uma curva poligonal γ , não necessariamente conexa. Esta curva é bem aproximada pelo grafo dual do grafo formado pelas arestas, que têm um

vértice em cada uma dessas duas células. Na Figura 4 à esquerda, γ está formada pelas arestas em vermelho. À direita, a aproximação pelo grafo dual. Note que a característica de Euler de $\chi(\gamma)$ corresponde ao seu número de componentes conexas n_c . Assim, uma célula viola a segunda condição se $n_c \neq 1$. Nos casos ilustrados na Figura 4, temos $\chi(\gamma) = 2$, na parte superior, e $\chi(\gamma) = 0$ na parte inferior.

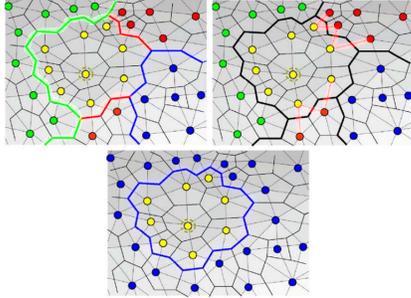


Figura 4. Violações da segunda condição da propriedade da bola fechada. Figura adaptada de [17].

3) *Terceira condição da bola fechada:* A terceira condição equivale a restringir para três o número mínimo de células vizinhas a uma célula [11], [13]. Note que isso restringe a malha original a possuir mais que três vértices. Além disso, observe que a maior simplificação de uma malha sem bordo é um tetraedro. Na Figura 5, ilustramos alguns casos da violação dessa propriedade.

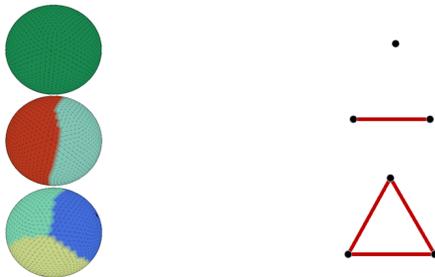


Figura 5. Uma, duas e três células de Voronoi, respectivamente. Primárias (esquerda) e duais (direita).

IV. IMPLEMENTAÇÃO

A. Geração da cobertura de discos

Como visto anteriormente, na etapa de geração dos discos, cada vértice definido como o centro de um disco pertence apenas a esse disco. Ao passo que, os demais podem pertencer a vários discos. O processo toma um vértice inicial v_0 , que depende da abordagem utilizada para a escolha dos pontos, e cria um disco com centro v_0 e raio r . Baseado na métrica escolhida, novos vértices são adicionados a uma fila de prioridade para determinação de sua distância. A geração do disco continua até que um vértice w , tal que $d(v_0, w) > r$ seja encontrado.

B. Geração do diagrama de Voronoi

Uma vez criada a cobertura de discos, vem a etapa de criação da cobertura de Voronoi. Inicialmente, são criadas n células vazias, onde n é o número de discos da etapa anterior. A partir daí, para cada vértice v da malha original deve ser

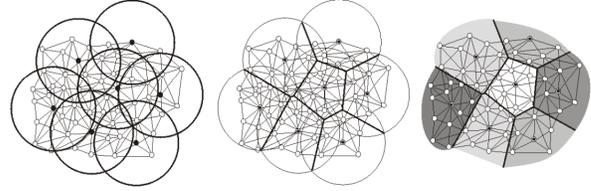


Figura 6. Geração das células de Voronoi. Figura extraída de [11].

decidido a qual célula ele pertence. Para isso, cada um dos discos que contém v tem armazenado a distância d_v , sobre a malha, do seu centro até v . Logo, v será adicionado à célula na qual o disco associado possui menor distância d_v . O processo é ilustrado na figura 6. Após gerada uma cobertura inicial, o algoritmo procede com a etapa de checagem da boa formação e refinamento.

Caso alguma célula c_k viole as condições da propriedade da bola fechada, o refinamento é efetuado da seguinte maneira: o disco associado à célula c_k tem seu raio reduzido por algum fator $fator \in [0, 1]$. Foi utilizado $fator = 0.5$. Para a lista de vértices que foram excluídos desse disco, caso eles não pertençam a nenhum outro, executa-se a geração da cobertura de discos e em seguida a de Voronoi.

Os novos discos criados devem ser levados em consideração, gerando novas células adequadamente. Ao final do processo, obtém-se uma cobertura de Voronoi bem formada, como na figura 7.



Figura 7. Exemplo de uma cobertura de Voronoi sobre o modelo *Bimba con Nastrino*.

C. Geração da malha simplificada

Como pode ser visto em [17], o processo anterior de geração da cobertura de Voronoi induz uma relação de equivalência \sim entre os vértices da malha original. Dois vértices são equivalentes se eles pertencem a uma mesma célula de Voronoi. Observe que isso define n classes de equivalência na malha,

com n o número de células de Voronoi. Essa relação induz três classes de equivalência nos triângulos da malha original, de forma que sejam v_1, v_2 e v_3 três vértices de um triângulo t qualquer de M :

- 1) Se $v_1 \sim v_2 \sim v_3$, então t está totalmente contido em uma célula de Voronoi e será descartado
- 2) Se $v_1 \sim v_2 \not\sim v_3$ (ou permutações entre os índices), então t está na intersecção de duas células e degenera para um segmento de aresta da triangulação resultante
- 3) Se $v_1 \not\sim v_2 \not\sim v_3$, então células correspondentes aos vértices determinam um triângulo na malha simplificada

A última classe de equivalência dos triângulos é bem útil na geração da malha simplificada. Os triângulos que pertencem a ela são ditos *triângulos característicos*.

Para gerar a malha simplificada, percorre-se a cobertura de Voronoi, e para cada célula C e sua 1-vizinhança de Voronoi $N_1V(C)$, faz-se uma identificação da célula com seu dual, ou seja, a célula de Voronoi representada pelo seu sítio passa a ser um vértice de um triângulo na malha simplificada e um vértice de Voronoi e dois sítios de células adjacentes definem um triângulo da malha simplificada. Observe que os vértices de Voronoi são interiores a triângulos característicos.

Construir de forma coerente a orientação da malha simplificada corresponde a determinar uma ordenação adequada na geração do dual de células de Voronoi adjacentes. Por construção, os triângulos característicos possuem uma relação biunívoca com os triângulos da malha simplificada. Assim, para definir a orientação da malha simplificada, basta utilizar a orientação definida pelos triângulos característicos, ou seja, a orientação da malha simplificada é induzida pela malha original.

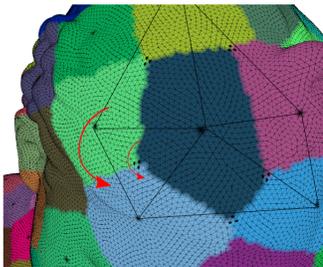


Figura 8. Geração do dual ao diagrama de Voronoi. Orientação através dos triângulos característicos.

V. RESULTADOS

Para obtenção dos resultados, foi implementada uma aplicação na linguagem C/C++. Para auxiliar na visualização e no cálculo da distância de Hausdorff foram utilizadas as ferramentas *Metro* e *MeshLab*.

É feita uma análise da simplificação através da distância de Hausdorff, ϵ_H , entre a malha original e a malha simplificada, variando a estratégia de seleção de pontos. Um problema dessa análise é que essa distância é extrínseca à malha e pode apresentar resultados inadequados para malhas onde duas regiões estejam próximas no espaço, mas distantes por métricas sobre

a malha. Para simplificar na identificação de cada resultado na Tabela I, utilizamos a seguinte notação: Dijkstra incremental (DI), Dijkstra baseado em curvatura (DC), Dijkstra com ponto mais distante (DD), Fast Marching incremental (FI) e Fast Marching baseado em curvatura (FC). Vale salientar que o erro ϵ_H é calculado ponderado pela diagonal do *BoundingBox* de cada modelo.

A utilização do valor absoluto da curvatura como critério de seleção de pontos garante que os pontos de maior curvatura estejam na malha simplificada, diminuindo o erro entre as malhas. Porém, não necessariamente obtém resultados visuais melhores, pois com o tamanho do disco fixo pode desconsiderar outros pontos próximos que também tem alta curvatura e estarão no mesmo disco.

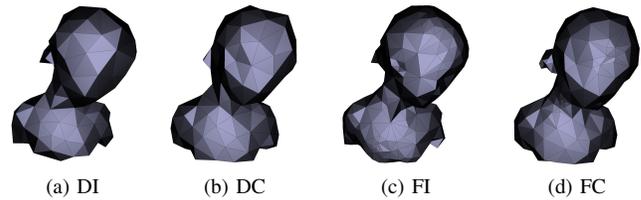


Figura 9. Simplificação do modelo *Bimba con Nastrino*, com $r=0.10$. Originalmente com 149K triângulos.

Nos resultados ilustrados na Figura 10, percebe-se que para um mesmo raio, pode haver uma grande diferença entre na quantidade de vértices da malha simplificada.

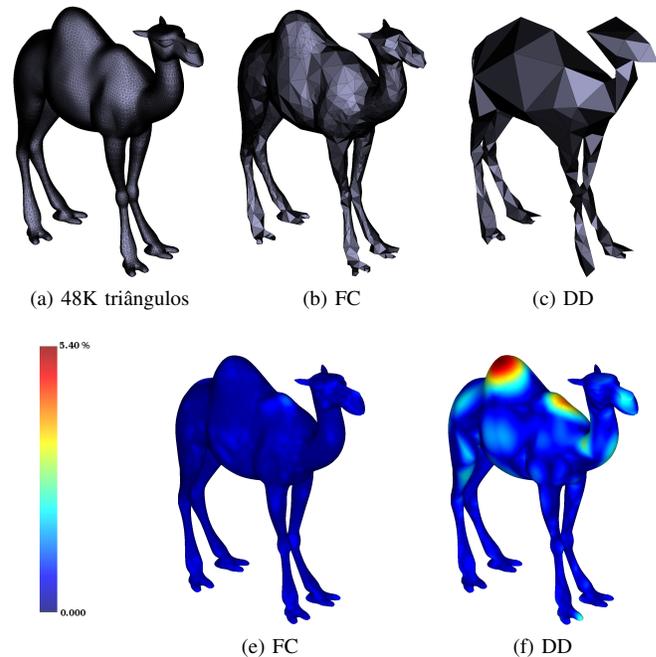


Figura 10. Simplificação do modelo *Camel*, com raio=0.15 (cima) colorização utilizando as distâncias de Hausdorff (baixo).

Como foi observado na Figura 11, é possível obter tanto simplificações pequenas quanto expressivas, mas ainda assim preservando a topologia da superfície. Ao longo do trabalho,

a adaptação à geometria ocorreu apenas no critério de seleção dos pontos, ao passo que, o controle da topologia constitui uma parte fundamental do processo. Naturalmente, uma extensão é adaptar a amostragem de pontos em regiões de interesse, como altas curvaturas.

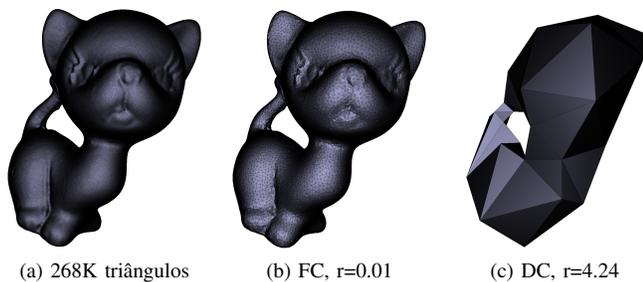


Figura 11. Simplificação do modelo *Kitten*.

Malha	Estratégia	# faces	$T_{Sel}(s)$	$T_{Vor}(s)$	$T_{Simp}(s)$	ϵ_H %
BIMBA	DI	318	4.846	0.486	0.011	3.53
BIMBA	DC	332	5.450	0.489	0.012	3.21
BIMBA	FI	804	4.149	731.1	0.030	3.56
BIMBA	FC	530	4.143	319.3	0.019	3.05
CAMEL	FC	4016	0.903	353.9	0.220	1.23
CAMEL	DD	578	1.416	440.4	0.024	5.40
KITTEN	FC	27334	9.676	2.681	3.986	1.92
KITTEN	DD	80	12.25	6899	0.002	9.10

Tabela I
TABELA COM RESULTADOS OBTIDOS

A. Limitação

Durante o trabalho, malhas com bordo não foram tratadas. Por isso, não serão exibidos resultados com elas. Ainda assim, o método funciona perfeitamente com esse tipo de malha, basta apenas modificação na forma de acesso à vizinhança das células de Voronoi nos métodos que geram os triângulos a partir do diagrama de Voronoi.

Uma outra limitação é que o método não funciona em malhas que não são variedades discretas (*nonmanifold meshes*), devido aos critérios de boa formação do diagrama de Voronoi.

VI. CONCLUSÃO

Neste trabalho ¹ foi apresentada uma adaptação para malhas triangulares densas do método proposto por [11]. O processo ocorre definindo uma cobertura sobre a malha para selecionar os vértices da malha simplificada. Na etapa de geração dos discos foram utilizadas duas métricas, Dijkstra e *Fast Marching*.

Além disso, foram utilizadas três estratégias de distribuição dos discos, incremental, baseada em curvatura e ponto mais distante. A partir disso, foi definido um Diagrama de Voronoi intrínseco, de maneira que, as células sejam bem formadas [13]. Isso é uma condição necessária para que a malha simplificada seja uma triangulação topologicamente equivalente à

malha original [12], [17]. A malha simplificada é então gerada como dual à cobertura de Voronoi e orientada através da malha original. Alguns outros possíveis caminhos são: Avaliar formas de melhorar a eficiência do método; Utilizar outras curvaturas com critério de seleção com o objetivo de preservar vértices em regiões onde a curvatura gaussiana se anula; Controlar a razão de aspecto dos triângulos da malha simplificada através de restrições ao raio de células adjacentes; Efetuar a checagem topológica durante a criação dos discos; Utilizar atributos intrínsecos à superfície para controle automático da amostragem, fazendo com que a triangulação seja de Delaunay na superfície.

REFERÊNCIAS

- [1] A. D. Kalvin and R. H. Taylor, "Surfaces: Polygonal mesh simplification with bounded error," *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 16, pp. 64–77, 1996.
- [2] W. Schroeder, J. Zarge, and W. Lorensen, "Decimation of triangle meshes," *SIGGRAPH*, vol. 26, pp. 65–70, 1992. [Online]. Available: <http://doi.acm.org/10.1145/142920.134010>
- [3] J. Cohen, A. Varshney, D. Manocha, G. Turk, H. Weber, P. Agarwal, F. Brooks, and W. Wright, "Simplification envelopes," in *SIGGRAPH*. ACM, 1996, pp. 119–128. [Online]. Available: <http://doi.acm.org/10.1145/237170.237220>
- [4] M. Garland and P. S. Heckbert, "Surface simplification using quadric error metrics," in *SIGGRAPH*. ACM, 1997, pp. 209–216. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1145/258734.258849>
- [5] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, and W. Stuetzle, "Mesh optimization," in *SIGGRAPH*. ACM, 1993, pp. 19–26. [Online]. Available: <http://doi.acm.org/10.1145/166117.166119>
- [6] H. Hoppe, "Progressive meshes," in *SIGGRAPH*. ACM, 1996, pp. 99–108. [Online]. Available: <http://doi.acm.org/10.1145/237170.237216>
- [7] J. Rossignac and P. Borrel, "Multi-resolution 3d approximations for rendering complex scenes," IBM, Tech. Rep., 1992.
- [8] D. Luebke, "Hierarchical structures for dynamic polygonal simplification," Tech. Rep., 1996.
- [9] P. S. Heckbert and M. Garland, "Survey of polygonal surface simplification algorithms," Multiresolution Surface Modeling Course - SIGGRAPH, 1997.
- [10] P. Cignoni, C. Montani, and R. Scopigno, "A comparison of mesh simplification algorithms," *Computers and Graphics*, vol. 22, pp. 37–54, 1997.
- [11] A. Peixoto, "Extração de malhas adaptativas em multi-resolução a partir de volumes usando simplificação e refinamento," Ph.D. dissertation, Pontifícia Universidade Católica - Rio de Janeiro, 2002.
- [12] H. Edelsbrunner and N. R. Shah, "Triangulating topological spaces," in *Symposium on Computational geometry*. ACM, 1994, pp. 285–292. [Online]. Available: <http://doi.acm.org/10.1145/177424.178010>
- [13] R. Dyer, H. Zhang, and T. Möller, "Surface sampling and the intrinsic Voronoi diagram," *Computer Graphics Forum*, vol. 27, no. 5, pp. 1393–1402, 2008. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-8659.2008.01279.x>
- [14] M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, and A. H. Barr. (2002) Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds. [Online]. Available: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.24.3427>
- [15] A. Maheshwari and S. Wuhler, "Geodesic paths on 3d surfaces: Survey and open problems," in *CoRR*, 2009.
- [16] R. Kimmel and J. Sethian, "Computing geodesic paths on manifolds," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 95, no. 15, pp. 8431–8435, 1998. [Online]. Available: <http://www.pnas.org/content/95/15/8431.abstract>
- [17] T. Boubekeur and M. Alexa, "Mesh simplification by stochastic sampling and topological clustering," *Computers and Graphics*, vol. 33, no. 3, pp. 241 – 249, 2009, IEEE International Conference on Shape Modelling and Applications. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cag.2009.03.025>

¹Os autores gostariam de agradecer o apoio financeiro dado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES.